

Q12 / Q13

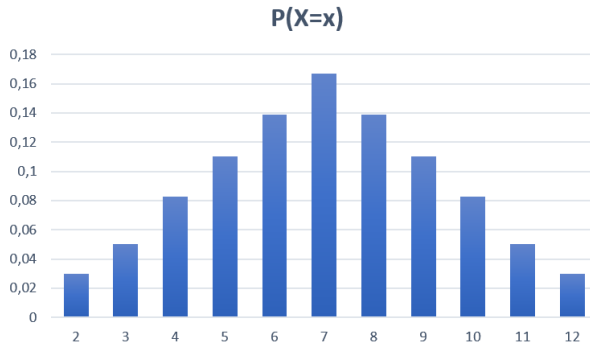
Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilung

Beispiel:

Werfen zweier unterscheidbarer Würfel.
Die Zufallsgröße X beschreibt die geworfene Augensumme.

x_i	2	3	4	5	6	7
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$

Eine Funktion X , die jedem Ergebnis ω eines Ergebnisraumes Ω eine reelle Zahl x_i zuordnet, heißt **Zufallsgröße X** . Jeder Wert x einer Zufallsgröße X tritt mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ auf. Die dazugehörige Funktion heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung** der Zufallsgröße X .



x_i	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

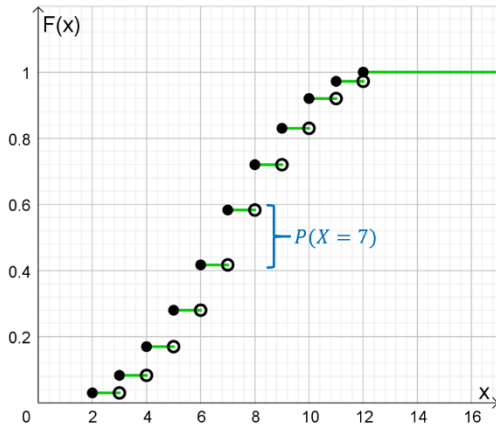
Q12 / Q13

Kumulative Verteilungsfunktion

Die Funktion F , die bei gegebener Zufallsgröße X jeder reellen Zahl x die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq x_i)$ zuordnet, heißt **kumulative Verteilungsfunktion** der Zufallsgröße X .

Beispiel:

Werfen zweier unterscheidbarer Würfel.
Die Zufallsgröße X beschreibt die geworfene Augensumme.



x_i	2	3	4	5	6	7
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$
$P(X \leq x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$

x_i	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$P(X \leq x_i)$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	1

Q12 / Q13

Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung



Der **Erwartungswert** $E(X)$ einer Zufallsgröße X ist der zu erwartende Mittelwert.

$$E(X) = \mu = x_1 \cdot P(X = x_1) + \dots + x_k \cdot P(X = x_k)$$

Die **Varianz** $Var(X)$ ist die mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert und die **Standardabweichung** σ die mittlere Abweichung der Streuung, d.h. die Wurzel aus der Varianz.

$$Var(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \dots + (x_k - \mu)^2 \cdot P(X = x_k)$$

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

1) Ziehen mit Zurücklegen und Beachtung der Reihenfolge

Aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln werden k Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

n^k Möglichkeiten

2) Ziehen ohne Zurücklegen

a) mit Beachtung der Reihenfolge

Aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln werden k Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots$ Möglichkeiten

Werden alle Kugeln vollständig gezogen, so spricht man von einer **Permutation**: $n!$

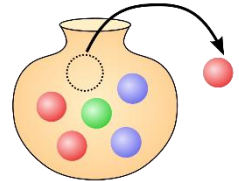
b) ohne Beachtung der Reihenfolge

„Ziehen mit einem Griff“

$\binom{n}{k}$ Möglichkeiten

nicht unterscheidbare Kugeln

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$



Ein Zufallsexperiment mit nur zwei Ergebnissen heißt **Bernoulli-Experiment**.

Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer ist p , diejenige für eine Niete q . Es gilt: $q = 1 - p$.

Bernoulli-Kette: Zufallsexperiment, das aus n unabhängigen Durchführungen eines Bernoulli-Experiments besteht.

Trefferwahrscheinlichkeit: $P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$ („genau k Treffer“)



Binomialkoeffizient

Merke:

- | | |
|---------------------------|-------------------------------------|
| • höchstens k Treffer | $P(X \leq k)$ |
| • weniger als k Treffer | $P(X < k) = P(X \leq k - 1)$ |
| • mindestens k Treffer | $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$ |
| • mehr als k Treffer | $P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$ |

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Anzahl der Treffer X einer Bernoulli-Kette heißt Binomialverteilung $B(n;p)$

Es gilt:

- X kann die Werte $0, 1, 2, 3, \dots, n$ annehmen
- $B(n; p; k) = P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$

Erwartungswert μ einer binomialverteilten Zufallsgröße: $E(X) = \mu = n \cdot p$

Varianz und Standardabweichung einer $B(n;p)$ -verteilten Zufallsgröße:

$$Var(X) = n \cdot p \cdot q$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

1. Axiom: $P(A) \geq 0$

Nichtnegativität

2. Axiom: $P(\Omega) = 1$

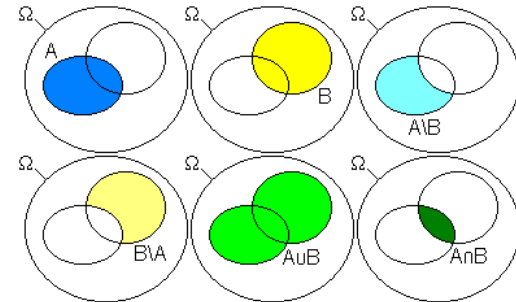
Normiertheit

3. Axiom: $A \cap B = \{ \} \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Additivität

Folgerungen:

- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- $P(\{ \}) = 0$
- $A \subseteq B \rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(A) \leq 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $A = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_k\} \rightarrow P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_k)$



Vorgehensweise:

- 1) Festlegen einer Testgröße und des Stichprobenumfangs n
- 2) Mathematische Formulierung der **Nullhypothese H_0** und der **Gegenhypothese H_1**
Getestet wird, ob aufgrund der Stichprobenergebnisse H_0 angenommen oder verworfen wird.
- 3) Bestimmen der Entscheidungsregel:
Aufteilung der möglichen Werte in einen Annahme- (A) und einen Ablehnungsbereich $\bar{A}$
Bei Test können zwei Fehler auftreten:
 - **Fehler 1. Art:** H_0 trifft zu, wird aber abgelehnt
 - **Fehler 2. Art:** H_1 trifft zu, aber die Nullhypothese wird angenommen
- 4) Festlegen des Signifikanzniveaus α :
höchster Wert, den die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art nicht überschreiten darf

Eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion f heißt **Dichtefunktion**.

Es gilt:

1) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

Die Funktion f ist die Dichtefunktion der stetigen Zufallsgröße X , wenn für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ gilt: $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$

Erwartungswert: $\mu = \int_a^b x \cdot f(x) dx$

Varianz: $\sigma^2 = \text{Var}(X) = \int_a^b (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$

Q12 / Q13

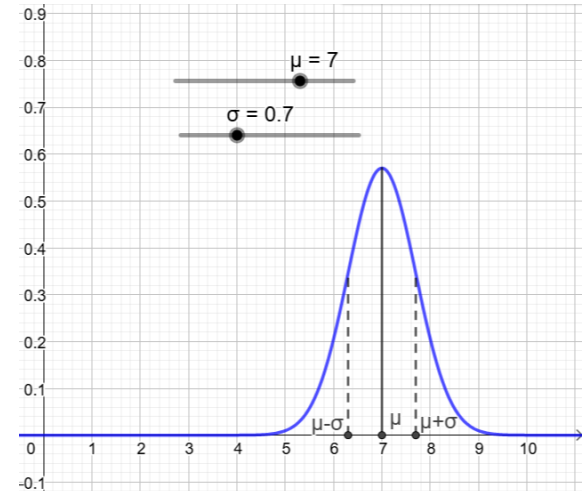
Gaußsche Glockenfunktion



Ist eine stetige Zufallsgröße X **normalverteilt** mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ , dann heißt die zugehörige Dichtefunktion **Gaußsche Glockenfunktion**.

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Die **Integralfunktion** $\Phi_{\mu,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{\mu+\sigma} \varphi_{\mu,\sigma}(x) dx$ kann nicht mit elementaren Funktionen dargestellt werden.



Q12 / Q13

Sigma-Regeln



X sei eine normalverteilte Zufallsgröße mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ .
Es gelten folgende **Sigma-Regeln**:

σ – Umgebung	Wahrscheinlichkeit
$[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$	68,3%
$[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$	95,5%
$[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$	99,7%

σ – Umgebung	Wahrscheinlichkeit
$[\mu - 1,64\sigma; \mu + 1,64\sigma]$	90%
$[\mu - 1,96\sigma; \mu + 1,96\sigma]$	95%
$[\mu - 2,58\sigma; \mu + 2,58\sigma]$	99%