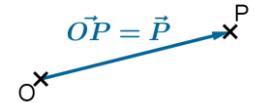


Q12 / Q13

Vektoren

Ein Vektor ist eine Menge paralleler, gleich langer und gleichgerichteter Pfeile.

Ortsvektor: $\overrightarrow{OP}$ ist ein Vektor mit Anfangspunkt im Ursprung und Endpunkt P

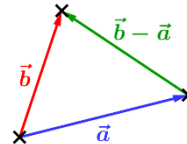


Vielfaches eines Vektors: $\lambda \vec{a}$



Addition und Subtraktion von Vektoren

$$\vec{a} + (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b}$$



Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl r

$$r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r a_1 \\ r a_2 \\ r a_3 \end{pmatrix}$$

- $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$ (Endpunktkoordinaten „minus“ Anfangspunktkoordinaten)

Beispiel: $A(1 \mid 2 \mid 3), B(-2 \mid 4 \mid -1) \rightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

- **parallele Vektoren:** $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$

Beispiel: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{u} = 2 \cdot \vec{v} \rightarrow$ die beiden Vektoren sind parallel

- **Mittelpunktsvektor:** $\vec{M} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{A} + \vec{B})$

Beispiel: $A(1 \mid 2 \mid 3), B(-2 \mid 4 \mid -1) \rightarrow \vec{M} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\rightarrow M(-0,5 \mid 3 \mid 1)$ **Koordinatenschreibweise**

- **Länge des Vektors:** $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Beispiel: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{29}$

Skalarprodukt: $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

- senkrechte Vektoren: $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 - 4 + 0 = 0 \quad \rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

- Winkel zwischen zwei Vektoren a und b: $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \cos \varphi = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right|} = \frac{-3}{\sqrt{21}}$$

$$\rightarrow \varphi = \cos^{-1} \left(-\frac{3}{\sqrt{21}} \right) \approx 130,9^\circ$$

$$\text{Vektorprodukt: } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

- Flächeninhalt eines Parallelogramms: $A_P = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Beispiel: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow A_P = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix} \right| = 6\sqrt{5}$$

- Flächeninhalt eines Dreiecks: $A_D = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$
- Spatvolumen: $V_S = |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$
- Pyramidenvolumen:
 - Viereckspyramide: $V_P = \frac{1}{3} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$
 - Dreieckspyramide: $V_P = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$

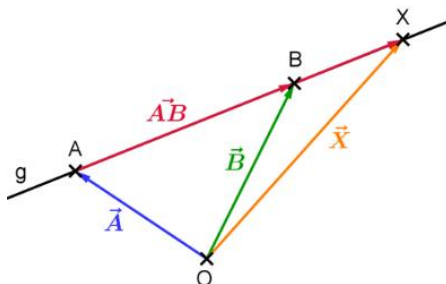
Die Parameterdarstellung einer Geraden g durch den Punkt A und den Richtungsvektor $\vec{u}$ lautet

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{u} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}$$


Ortsvektor


Richtungsvektor

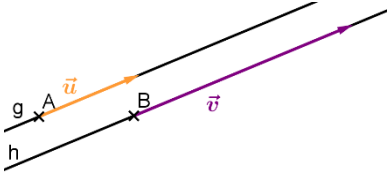
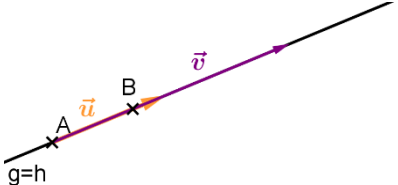
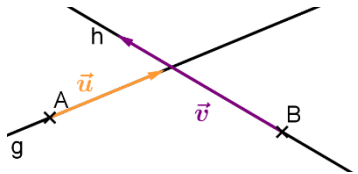
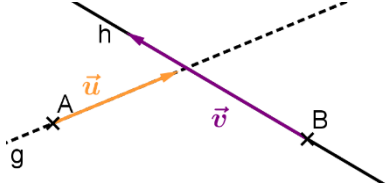
Für den **Richtungsvektor** $\vec{u}$ verwendet man den Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$.



Q12 / Q13

Gegenseitige Lage von Geraden

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u} \text{ und } h: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + \mu \cdot \vec{v}$$

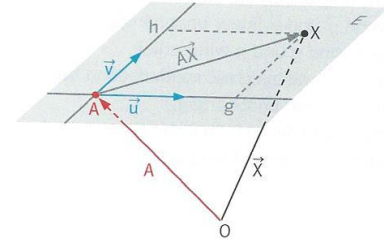
Bedingung	Gegenseitige Lage	
$\vec{v} = a \cdot \vec{u}$	$A \notin h \rightarrow g \parallel h$ 	$A \in h \rightarrow g = h$ 
$\vec{v} \neq a \cdot \vec{u}$	$\overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u} = \overrightarrow{OB} + \mu \cdot \vec{v}$ ist erfüllt $\rightarrow g \cap h$  Schnittwinkel: $\cos \varphi = \left \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{ \vec{u} \cdot \vec{v} } \right$	$\overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u} = \overrightarrow{OB} + \mu \cdot \vec{v}$ ist nicht erfüllt $\rightarrow g$ und h sind windschief 

1) **Parameterform:**

Die Ebene E durch den Punkt A wird von den beiden nicht parallelen Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannt. Dann ist für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$$

der Ortsvektor eines Punktes X der Ebene E.



2) **Normalenform:**

Ist A ein Punkt und $\vec{n}$ ein Normalenvektor der Ebene E, dann heißt $\vec{n} \circ (\vec{x} - \overrightarrow{OA}) = 0$ Normalenform der Ebenengleichung.

3) **Koordinatenform:**

Die Koordinatenform ist die ausmultiplizierte Form der Normalenform:

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - k = 0$$

Von der Parameterform in die Normalen- / Koordinatenform:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Normalenvektors: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

1. Möglichkeit

$$E: \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$E: \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \\ x_3 - 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$E: -x_1 + x_2 - 3x_3 + 8 = 0$$

2. Möglichkeit

$$E: -x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$$

$$A \text{ in } E: -1 + 2 - 9 - k = 0 \rightarrow k = -8$$

Von der Koordinatenform in die Parameterform: (eine mögliche Variante)

$$E: -x_1 + x_2 - 3x_3 + 8 = 0$$

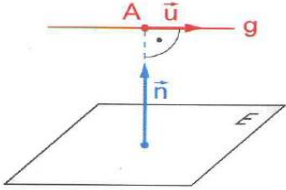
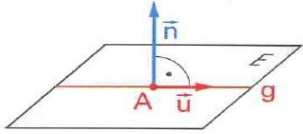
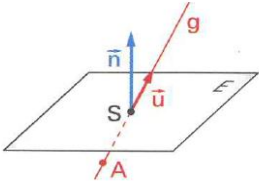
- Auflösen nach einer Variablen: $x_1 = x_2 - 3x_3 + 8$
- Ersetzen einer Variablen durch λ und μ : $x_2 = \lambda$, $x_3 = \mu$
- Passend untereinanderschreiben: $x_1 = \lambda - 3\mu + 8 = 8 + \lambda - 3\mu$
 $x_2 = \lambda$
 $x_3 = \mu$

$$\rightarrow E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Q12 / Q13

Gegenseitige Lage von Gerade und Ebene

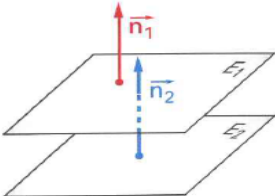
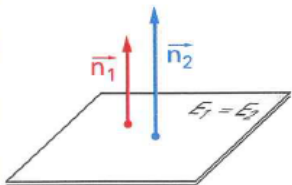
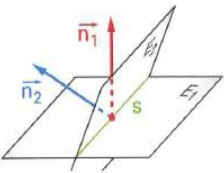
Gerade $g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u}$ und Ebene Ebene $E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - k = 0$

Bedingung	Gegenseitige Lage	
$\vec{u} \perp \vec{n}$	$A \notin E \rightarrow g \parallel E$ 	$A \in E \rightarrow g \text{ liegt in } E$ 
$\vec{u}$ nicht senkrecht auf $\vec{n}$	$\rightarrow g \cap E$  Schnittwinkel: $\sin \varphi = \left \frac{\vec{u} \circ \vec{n}}{ \vec{u} \cdot \vec{n} } \right$	

Q12 / Q13

Gegenseitige Lage von Ebenen

$$E_1: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - k = 0 \text{ und } E_2: n_1^*x_1 + n_2^*x_2 + n_3^*x_3 - k^* = 0$$

Bedingung	Gegenseitige Lage	
$\vec{n}_{E1} \parallel \vec{n}_{E2}$	$A_{E1} \notin E_2 \rightarrow E_1 \parallel E_2$ 	$A_{E1} \in E_2 \rightarrow E_1 = E_2$ 
$\vec{n}_{E1} \nparallel \vec{n}_{E2}$	$\rightarrow E_1 \cap E_2$  Schnittwinkel: $\cos\varphi = \left \frac{\vec{n}_{E1} \circ \vec{n}_{E2}}{ \vec{n}_{E1} \cdot \vec{n}_{E2} } \right$	

1) Abstand Punkt P – Gerade g (analog: **Abstand zweier paralleler Geraden**)

- allgemeinen Geradenpunkt $\vec{X}$ aufstellen
- $\overrightarrow{PX} \circ \vec{u} = 0$ ($\vec{u}$ ist Richtungsvektor von g) $\rightarrow \lambda$ berechnen
- λ in $\overrightarrow{PX}$ einsetzen und Abstand $d(P; g) = |\overrightarrow{PX}|$ berechnen

2) Abstand Punkt – Ebene (analog: **Abstand Gerade – Ebene**)

- Hesse'sche Normalenform der Ebene:

$$E_{HNF}: \frac{1}{|\vec{n}|} (n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - c) = 0$$

- Abstand $d(P, E) = \left| \frac{1}{|\vec{n}|} (n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 - c) \right|$ berechnen

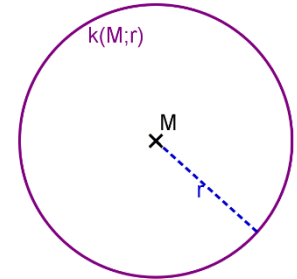
3) Abstand zweier paralleler Ebenen

- Punkt P auf einer der beiden Ebenen bestimmen
- HNF aus der anderen Ebenen aufstellen
- Abstand $d(P, E) = \left| \frac{1}{|\vec{n}|} (n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 - c) \right|$ berechnen

Kreisgleichung:

Für einen Kreis k um den Mittelpunkt $M(m_1 | m_2)$ und Radius r gilt:

$$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2$$

**Kugelgleichung:**

Für eine Kugel K mit Mittelpunkt $M(m_1 | m_2 | m_3)$ und Radius r gilt:

$$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$$

