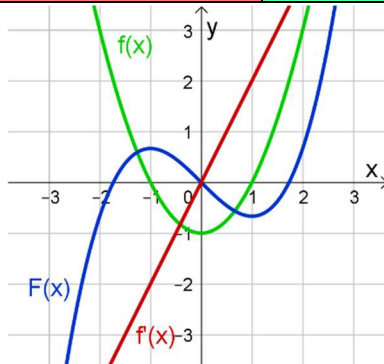


Q12 / Q13

Ableitungsfunktion vs. Stammfunktion

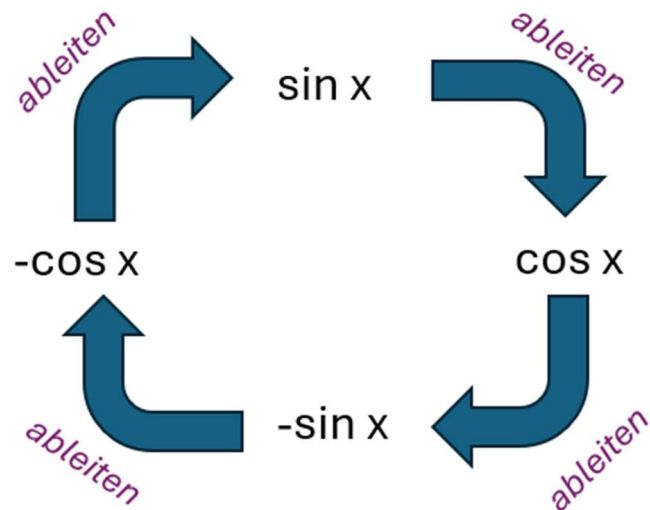
Ableitungsfunktion $f'(x)$	Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
Funktionswerte $f'(x)$ sind Steigungswerte von $f(x)$	Funktionswerte $f(x)$ sind Steigungswerte von $F(x)$	
$f'(x) > 0$ $f'(x) < 0$ $f'(x) = 0$	G_f sms G_f smf - Extremstelle bei $f(x)$	G_F ist rechtsgekrümmt G_F ist linksgekrümmt - Wendestelle von $F(x)$
	$f(x) > 0$ $f(x) < 0$ $f(x) = 0$	G_F sms G_F smf - Extremstelle bei $F(x)$



Eine Funktion F heißt Stammfunktion zur Funktion f , wenn für jede Stelle x aus der Definitionsmenge von f gilt: $F'(x) = f(x)$.

Q12 / Q13

Ableitung Sinus- und Kosinusfunktion



Q12 / Q13

Ableitungsregeln



<u>Regel</u>	<u>Grundfunktion</u>	<u>Ableitung</u>	<u>Beispiel</u>
Kettenregel	$f(x) = u(v(x))$	$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$	$f(x) = (2x + 1)^3$ $f'(x) = 3 \cdot (2x + 1)^2 \cdot 2$
Summenregel	$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$	$f(x) = 3x^2 + 2x$ $f'(x) = 6x + 2$
Produktregel	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$	$f(x) = 2x \cdot (x + 1)$ $f'(x) = 2(x + 1) + 2x \cdot 1$
Faktorregel	$f(x) = k \cdot u(x)$	$f'(x) = k \cdot u'(x)$	$f(x) = 2 \cdot (3 + x^2)$ $f'(x) = 2 \cdot 2x$
Quotientenregel	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$	$f(x) = \frac{x}{x + 1}$ $f'(x) = \frac{(x + 1) \cdot 1 - x \cdot 1}{(x + 1)^2}$

Q12 / Q13

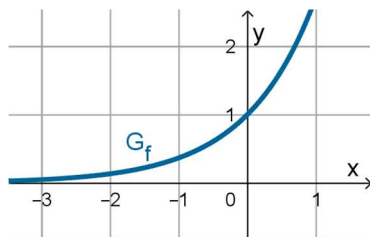
Die nat. Exponentialfunktion und der nat. Logarithmus



Die Funktion f mit $f(x) = e^x$ heißt **natürliche Exponentialfunktion**. Für ihre Ableitung gilt:

$$f'(x) = e^x.$$

Die Basis heißt eulersche Zahl.



Ableitungen:

1. $f(x) = e^{v(x)}$

$$\rightarrow f'(x) = e^{v(x)} \cdot v'(x)$$

2. $g(x) = e^x \cdot v(x)$

$$\rightarrow g'(x) = e^x \cdot v(x) + e^x \cdot v'(x)$$

Grenzwerte mit nat. Exponentialfunktion:

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^n \cdot e^x) = 0$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^n}{e^x} \right) = 0$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x^n) = +\infty$

Der nat. Logarithmus ist der **Logarithmus zur Basis e**. Man schreibt: $\log_e(a) = \ln(a)$ (mit $a > 0$).

Logarithmusgesetze:

$$\ln(a^r) = r \cdot \ln(a)$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln(a : b) = \ln(a) - \ln(b)$$

Q12 / Q13

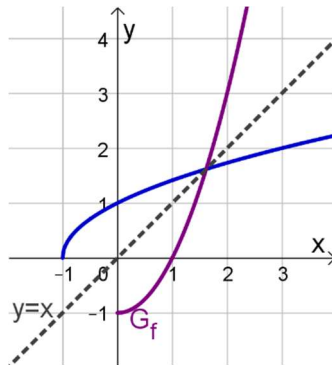
Umkehrfunktion

Eine Funktion $f: x \rightarrow f(x)$ mit der Definitionsmenge D_f und der Wertemenge W_f heißt umkehrbar, falls es zu jedem $y \in W_f$ genau ein $x \in D_f$ mit $f(x) = y$ gibt. Die entsprechende Funktion heißt **Umkehrfunktion** von f und wird mit f^{-1} bezeichnet.

Jede streng monotone Funktion ist umkehrbar.

Graphische Bestimmung

Spiegeln von G_f an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten ($y = x$)



Rechnerische Bestimmung

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ für } x \in \mathbb{R}_0^+$$

$$x = y^2 - 1 \text{ Vertauschen von } x \text{ und } y$$

$$y^2 = x + 1 \text{ Auflösen nach } y$$

$$y = \sqrt{x + 1} = f^{-1}(x)$$

$$D_{f^{-1}} = W_f = [-1; +\infty[, W_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}_0^+$$

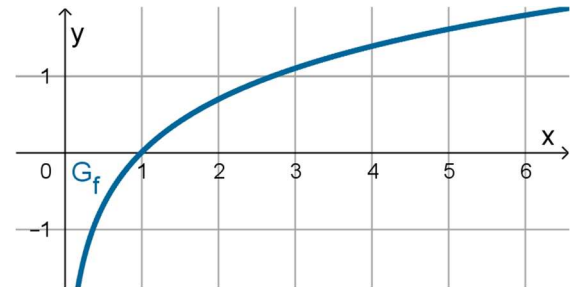
Die quadratische Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ nicht umkehrbar

→ Einschränkung des Definitionsbereichs

→ die Umkehrfunktion dieser quadr. Funktion ist die **Wurzelfunktion**

Die Funktion f mit $f(x) = \ln(x)$ und $x > 0$ heißt natürliche Logarithmusfunktion. Sie ist die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion mit $y = e^x$. Es gilt: $\ln(e^x) = e^{\ln(x)} = x$.

- Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}^+$
- Wertebereich: $W = \mathbb{R}$
- wichtige Punkte: $(1 \mid 0)$ und $(e \mid 1)$
- Verlauf des Graphen: streng monoton steigend
 - für $x \rightarrow \infty$: $f(x) \rightarrow \infty$
 - für $x \rightarrow 0$: $f(x) \rightarrow -\infty$
- Ableitung: $f'(x) = \frac{1}{x}$
- Stammfunktion: $F(x) = \ln|x|$



1) Monotonie

- $f'(x) < 0$ → G_f ist streng monoton fallend (smf)
- $f'(x) > 0$ → G_f ist streng monoton steigend (sms)



Monotonietabelle

2) Extrempunkte

$$f'(x_0) = 0$$

- Vorzeichenwechsel von **+** zu **-**
- Vorzeichenwechsel von **-** zu **+**

→ **Hochpunkt** an der Stelle x_0

→ **Tiefpunkt** an der Stelle x_0

Extrempunkt $E(x_0 | f(x_0))$

3) Wendepunkte

$$f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_0) \neq 0$$

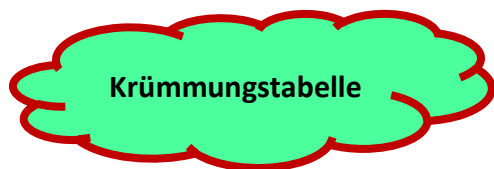
→ Wendepunkt $W(x_0 | f(x_0))$

ABER: gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$

→ Terrassenpunkt $TER(x_0 | f(x_0))$

4) Krümmungsverhalten

- $f''(x) > 0$ → G_f ist linksgekrümmt
- $f''(x) < 0$ → G_f ist rechtsgekrümmt

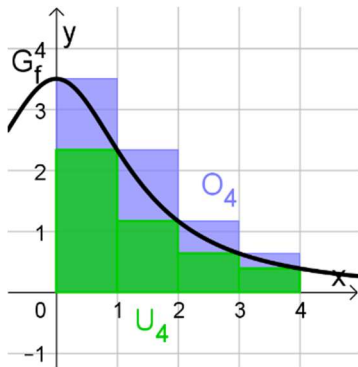


Krümmungstabelle

Q12 / Q13

Abschätzung des Flächeninhalts zwischen Graph und x-Achse

Bestimmung mithilfe der Ober- und Untersumme

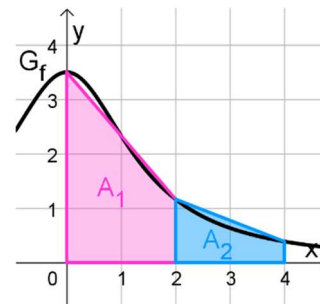


$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n$$

Bestimmung mithilfe geometrischer Figuren

z.B: mit Trapezen

$$f(x) = \frac{7}{x^2 + 2}$$



$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= \frac{1}{2} [f(0) + f(2)] \cdot 2 + \frac{1}{2} [f(2) + f(4)] \cdot 2 \\ &= 3,5 + \frac{7}{6} + \frac{7}{6} + \frac{7}{18} = \frac{56}{9} = 6, \bar{2} \text{ FE} \end{aligned}$$

Q12 / Q13

Das bestimmte Integral

Die Funktion f mit $f(x) \geq 0$ ist auf dem Intervall $[a;b]$ definiert. Der gemeinsame Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n$ von Unter- und Obersumme heißt **bestimmtes Integral** der Funktion f zwischen den Grenzen a und b .

obere Grenze

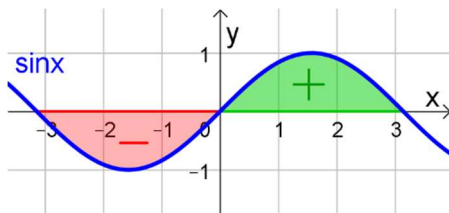
Integrationsvariable

$$\int_a^b f(x) dx$$

untere Grenze

Integrand

Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$ liefert die Flächenbilanz der Flächenstücke, die im Intervall $[a;b]$ zwischen dem Graphen und der x-Achse liegen. Flächenstücke oberhalb der x-Achse werden positiv, unterhalb negativ gewertet. Die Integralfunktion $F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$ beschreibt die Bilanz der Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse.



Flächenbilanz: $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0$

Fläche: $A = \left| \int_{-\pi}^0 \sin x dx \right| + \int_0^{\pi} \sin x dx = 2 + 2 = 4$

Q12 / Q13

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung



Jede **Integralfunktion** $F_a(x)$ ist eine Stammfunktion der Integrandenfunktion $f(x)$. Die untere Grenze a der Integralfunktion ist gleichzeitig auch eine Nullstelle.

Für eine Stammfunktion F gilt: $F'(x) = f(x)$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Beispiel:

$$f(x) = 2x + 3$$

$$\int_1^2 (2x + 3) dx = [x^2 + 3x]_1^2 = (2^2 + 3 \cdot 2) - (1^2 + 3 \cdot 1) = 10 - 4 = 6$$

Das unbestimmte Integral $\int f(x) dx$ ist die Menge aller Stammfunktionen von f .

Grundintegrale:

$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \ln x dx = x \cdot \ln x - x + c$	$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} \cdot x^{r+1} + c \quad \text{für } r \neq -1$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int e^x dx = e^x + c$

Integrationsregeln:

Beispiele

Faktorregel	$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$	$\int 2 \cdot (x+1) dx = 2 \cdot \int (x+1) dx$
Summenregel	$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$	$\int (2x+1) dx = \int 2x dx + \int 1 dx$
Kettenregel	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + c$	$\int \frac{2}{2x+1} dx = \ln 2x+1 + c$
	$\int f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$	$\int 2e^{2x} dx = e^{2x} + c$

1) Bilden der Stammfunktion durch Anwendung der Kettenregel (rückwärts)

Beispiel: $f(x) = 2 \cdot (5x - 1)^3$

„rückwärts nachdifferenzieren“ des Exponenten

$$F(x) = \int 2 \cdot (5x - 1)^3 dx = 2 \cdot \int (5x - 1)^3 dx = 2 \cdot (5x - 1)^4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10} \cdot (5x - 1)^4$$

2) Fläche zwischen Graph und x-Achse

Nullstellen beachten, da die Flächen dort ihr Vorzeichen wechseln!

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x = x(x - 1)(x + 2) \quad \rightarrow F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$$

$$\rightarrow A = \left| \int_{-2}^0 f(x) dx \right| + \left| \int_0^1 f(x) dx \right| = \dots = \frac{37}{12}$$

3) Flächen zwischen den Graphen zweier Funktionen

- Berechnung der Schnittstellen: $f(x) = g(x)$
- $A = |\int [f(x) - g(x)] dx|$

Beispiel: $f(x) = x^3$, $g(x) = x$ Schnittstellen: $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$

$$A = \left| \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 - x) dx \right| = \dots = \frac{1}{2}$$

4) Besondere Fläche

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x 2e^{-2t} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\int_0^x 2e^{-2t} dt \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-e^{-2t}]_0^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-2x} + 1) = 1 \end{aligned}$$

Eine ins Unendliche erstreckende Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse hat einen endlichen Flächeninhalt.