

Konvergenz

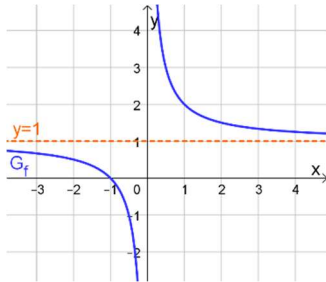
Die Funktionswerte $f(x)$ nähern sich für $x \rightarrow \pm\infty$ einer beliebigen Zahl a (Grenzwert / Limes) an.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$$

Der Graph G_f nähert sich der waagrechten Asymptote mit der Gleichung $y = a$.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{x} + 1$$



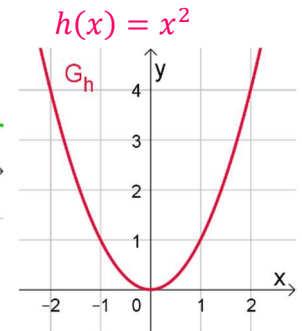
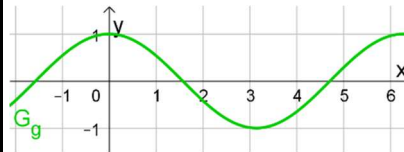
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{\rightarrow 0} + 1 \right) = 1$$

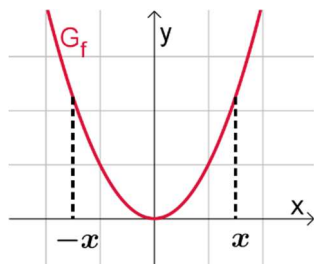
Divergenz

Die Funktionswerte $f(x)$ wachsen für $x \rightarrow \pm\infty$ unbegrenzt nach $+\infty$ oder $-\infty$ oder sind periodisch (trigonometrische Funktion).

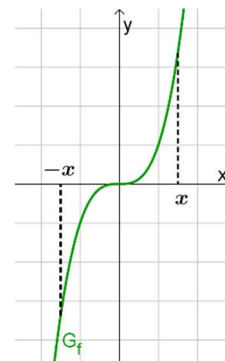
Beispiel:

$$g(x) = \cos x$$



Achsensymmetrie zur y-Achse

$$f(-x) = f(x)$$

Punktsymmetrie zum Ursprung

$$f(-x) = -f(x)$$

Beispiel: $f(x) = x^3 - x$

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x \neq f(x) \rightarrow \text{keine Achsensymmetrie}$$

$$-x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x) \rightarrow \text{Punktsymmetrie zum Ursprung}$$

$$g(x) = a \cdot f \left[b \left(x + \frac{c}{b} \right) \right] + d$$

- Verschiebung

- Verschiebung um $-\frac{c}{b}$ in x-Richtung
- Verschiebung um d in y-Richtung

(Ausklammern von b)

- Streckung / Stauchung

- Streckung um Faktor $\frac{1}{b}$ in x-Richtung für $0 < b < 1$
- Stauchung um Faktor $\frac{1}{b}$ in x-Richtung für $b > 1$
- Streckung um Faktor a in y-Richtung für $a > 1$
- Stauchung um Faktor a in y-Richtung $0 < a < 1$

- Spiegelung

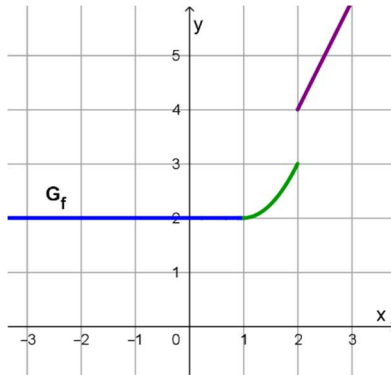
- $-f(x)$: Spiegelung an der x-Achse
- $f(-x)$: Spiegelung an der y-Achse

ACHTUNG: Beschreibung immer von innen nach außen!

Eine abschnittsweise definierte Funktion f heißt **stetig**, an der Stelle x_0 , wenn die Graphenstücke von f in x_0 aufeinandertreffen, d.h. der Graph macht innerhalb eines Teilintervalls des Definitionsbereichs keine Sprünge.

Beispiel: Überprüfen Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x < 1 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ 2x & \text{für } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{auf Stetigkeit bei } x = 1 \text{ und } x = 2.$$



An der Stelle $x = 1$ ist f stetig, an der Stelle $x = 2$ ist die Funktion unstetig.

Eine gebrochen-rat. Funktion hat die Form $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ (p und q sind ganzrationale Funktionen).

Die Nullstellen des Nenners heißen **Definitionslücken** von f.

Eine **Polstelle** von f ist die Definitionslücke x_0 von f mit $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm \infty$ und $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm \infty$;

der Graph G_f hat in diesem Fall eine **senkrechte Asymptote** mit der Gleichung $x = x_0$.

Beispiel: $f(x) = \frac{x-1}{(x-3)^2}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\overset{+}{x-1}}{\underset{+}{(x-3)^2}} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\overset{+}{x-1}}{\underset{+}{(x-3)^2}} = +\infty \quad \text{d.h. Polstelle bei 3 ohne VZW}$$

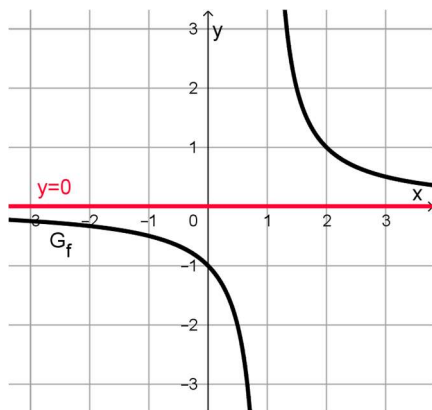
Merke:

- Divergiert eine Funktion f links und rechts der Definitionslücke jeweils mit $+\infty$ (oder $-\infty$), so liegt eine Polstelle ohne VZW vor.
- Divergiert eine Funktion f links und rechts der Definitionslücke jeweils entgegengesetzt, so liegt eine Polstelle mit VZW vor.

Zählergrad < Nennergrad

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

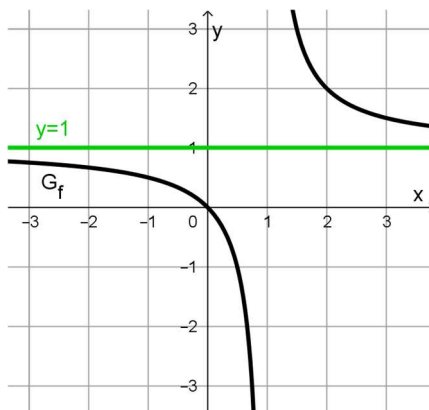
→ waagrechte Asymptote $y = 0$



Zählergrad = Nennergrad

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a \quad (a \neq 0)$$

→ waagrechte Asymptote $y = a$

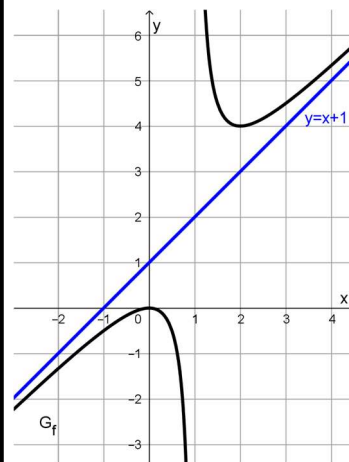


Zählergrad > Nennergrad

mit $z = n + 1$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm \infty$$

→ schräge Asymptote

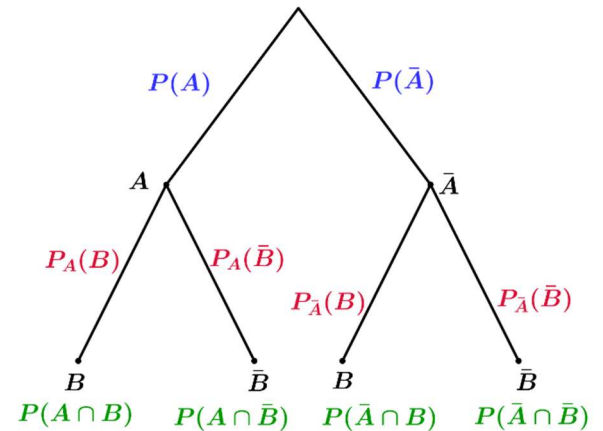


$P_A(B)$ ist die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung, dass das Ereignis A eingetreten ist. Ist das Ereignis A eingetreten, dann gilt für die bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Darstellung in der Vierfeldertafel:

	$P(A)$	$P(\bar{A})$
$P(B)$	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$
$P(\bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$



$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (\text{bedingte Wahrscheinlichkeit})$$

→ Ist die Wahrscheinlichkeit von B unabhängig davon, ob die Bedingung A eingetreten ist oder nicht, dann ergibt sich:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$$

$$\rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad [\text{stochastische Unabhängigkeit}]$$

Beispiel:

In der Vierfeldertafel sind die beiden Ereignisse R: „Person raucht“ und M: „Person ist männlich“ dargestellt. Es soll untersucht werden, ob diese beiden Ereignisse stochastisch unabhängig sind.

	M	$\bar{M}$	
R	0,16	0,11	0,27
$\bar{R}$	0,33	0,4	0,73
	0,49	0,51	1

$$P(R \cap M) = 0,16$$

$$P(R) = 0,27 \quad P(M) = 0,49 \quad \rightarrow P(R) \cdot P(M) = 0,1323 \neq P(R \cap M)$$

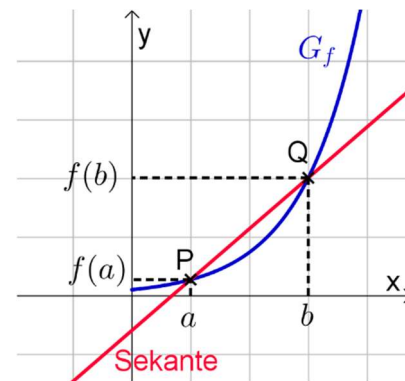
→ Die beiden Ereignisse sind stochastisch abhängig.

Dividiert man die Änderung $\Delta y = f(b) - f(a)$ durch die Länge des Intervalls $\Delta x = b - a$, so erhält man die mittlere Änderung pro Einheit (**mittlere Änderungsrate**)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{Differenzenquotient}$$

Geometrische Bedeutung:

Die mittlere Änderungsrate ist die Steigung der Sekante durch zwei Punkte $P(a \mid f(a))$ und $Q(b \mid f(b))$ des Graphen der Funktion f .



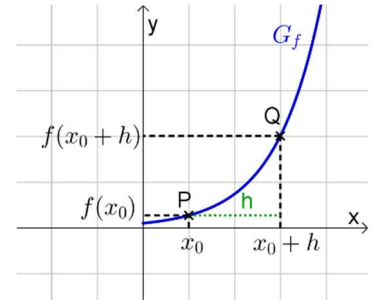
Der Grenzwert des Differenzenquotienten ist der **Differentialquotient**
(lokale Änderungsrate oder **Ableitung**)

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

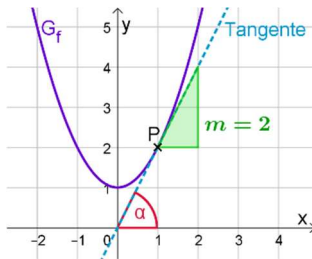
Berechnung mit der h-Methode:

$$f(x) = x^2 + 1 ; x_0 = 1$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 + 1 - (1^2 + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 + 1 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2$$



Geometrische Bedeutung:



Der Wert der Ableitung ist die Steigung der Tangente in dem entsprechenden Punkt $P(x_0 | f(x_0))$.

Der **Steigungswinkel** der Tangente ergibt sich aus $f'(x_0) = m = \tan \alpha$

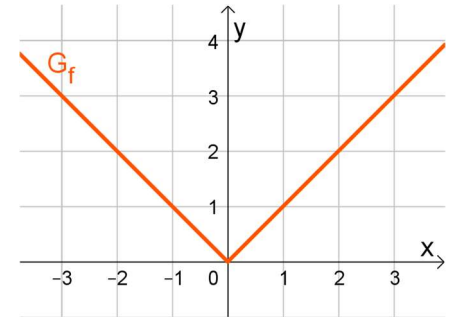
Steigung der **Normalen**: $m_N = -\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{m_t}$

Eine Funktion f heißt an der Stelle x_0 im Inneren ihres Definitionsbereichs differenzierbar, wenn der Grenzwert $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ existiert, sich also bei links- und rechtsseitiger Annäherung der gleiche Wert ergibt.

Beispiel für eine nicht-differenzierbare Funktion: $f(x) = |x|$ an der Stelle $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad (\text{abschnittsweise definierte Funktion})$$

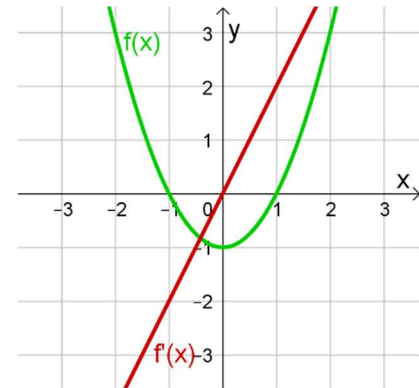
Die Funktion ist nicht differenzierbar, da der Differenzenquotient von links den Wert -1 und von rechts den Wert +1 annimmt.
(rechnerische Überprüfung mit der h-Methode)



Die Ableitungsfunktion f' zu einer Funktion f ordnet jeder Stelle x ihren Ableitungswert $f'(x)$ zu.

Zusammenhang zwischen den Graphen von Funktion und Ableitungsfunktion:

Ableitungsfunktion $f'(x)$	Funktion $f(x)$
Funktionswerte $f'(x)$ sind Steigungswerte von $f(x)$	
$f'(x) > 0$ $f'(x) < 0$ $f'(x) = 0$	G_f sms G_f smf - Extremstelle bei $f(x)$
	$f(x) > 0$ $f(x) < 0$ $f(x) = 0$



11.Klasse

Ableiten ganzrationaler Funktionen

<u>Regel</u>	<u>Grundfunktion</u>	<u>Ableitung</u>	<u>Beispiel</u>
Potenzregel	$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = x^5$ $f'(x) = 5x^4$
Kettenregel	$f(x) = u(v(x))$	$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$	$f(x) = (2x + 1)^3$ $f'(x) = 3 \cdot (2x + 1)^2 \cdot 2$
Summenregel	$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$	$f(x) = 3x^2 + 2x$ $f'(x) = 6x + 2$
Faktorregel	$f(x) = k \cdot u(x)$	$f'(x) = k \cdot u'(x)$	$f(x) = 2 \cdot (3 + x^2)$ $f'(x) = 2 \cdot 2x$

Mithilfe der Ableitung lässt sich auch der **Steigungswinkel einer Tangente** an den Graphen G_f bestimmen. Es gilt:

$$f'(x) = m = \tan \alpha$$

1) Monotonie

- $f'(x) < 0$ → G_f ist streng monoton fallend (smf)
- $f'(x) > 0$ → G_f ist streng monoton steigend (sms)


Monotonietabelle
2) Extrempunkte

$$f'(x_0) = 0$$

- Vorzeichenwechsel von **+** zu **-**
- Vorzeichenwechsel von **-** zu **+**

→ **Hochpunkt** an der Stelle x_0 → **Tiefpunkt** an der Stelle x_0 Extrempunkt $E(x_0 | f(x_0))$ 3) Wendepunkte

$$f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_0) \neq 0$$

→ Wendepunkt $W(x_0 | f(x_0))$ ABER: gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ → Terrassenpunkt $TER(x_0 | f(x_0))$ 4) Krümmungsverhalten

- $f''(x) > 0$ → G_f ist linksgekrümmt
- $f''(x) < 0$ → G_f ist rechtsgekrümmt


Krümmungstabelle