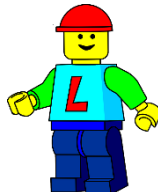


$\sqrt{a}$ ist diejenige nicht negative Zahl, die quadriert a ergibt:

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

Die Zahl a unter der Wurzel heißt **Radikand**.

Es gilt: $a \geq 0$



$$\sqrt{4} = 2 ; \sqrt{25} = 5 ; \sqrt{-16} =$$

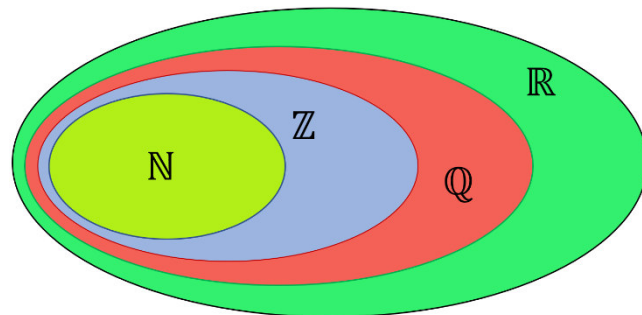
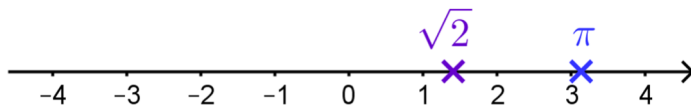


Jeder unendliche, nicht periodische Dezimalbruch ist eine **irrationale Zahl**.

Beispiele: $\sqrt{2}$; π ; $-\sqrt{3}$

Die rationalen und irrationalen Zahlen bilden die Menge der **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$.

Zu jeder irrationalen Zahl gehört ein Punkt auf der Zahlengeraden.



Für das Rechnen mit reellen Zahlen gelten analog zu den rationalen das Kommutativgesetz, das Assoziativgesetz und das Distributivgesetz.

<u>Rechenregel</u>		<u>Beispiel</u>
Produktregel	$(a \pm b)\sqrt{c} = a\sqrt{c} \pm b\sqrt{c}$ $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$(3 \pm x)\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \pm x\sqrt{2}$ $\sqrt{16 \cdot 25} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{25} = 4 \cdot 5 = 20$
Quotientenregel	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$



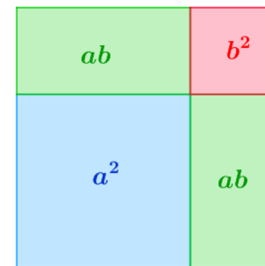
$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

- teilweise Radizieren: $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
- Rationalmachen des Nenners: $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
- Summe / Differenz von Wurzeln:

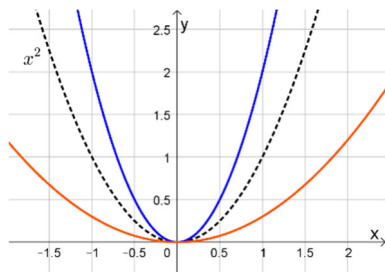
$$2\sqrt{3} + 7\sqrt{5} - \sqrt{3} + 2\sqrt{5} = (2-1)\sqrt{3} + (7+2)\sqrt{5} = \sqrt{3} + 9\sqrt{5}$$

1. Binomische Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. Binomische Formel: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. Binomische Formel: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

**Anwendung der Formeln:**

- Ausmultiplizieren: $(2 + \sqrt{3})^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3}$
- Faktorisieren: $5y^2 - 16x^2 = (\sqrt{5}y + 4x)(\sqrt{5}y - 4x)$

$$f(x) = a(x + d)^2 + e \quad a, d, e \in \mathbb{R}$$



$a > 0$ nach oben geöffnete Parabel

$a > 1$

enger als Normalparabel

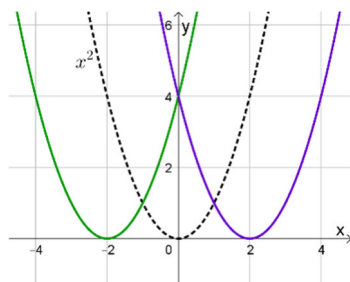
$a = 1$

Normalparabel

$0 < a < 1$

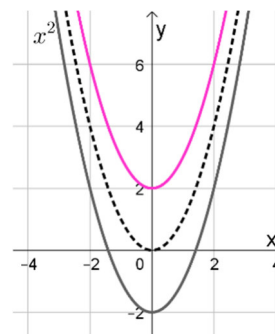
weiter als Normalparabel

$a < 0$ analog wie oben, nur nach unten geöffnete Parabel



$d > 0$ Verschiebung in negative x-Richtung

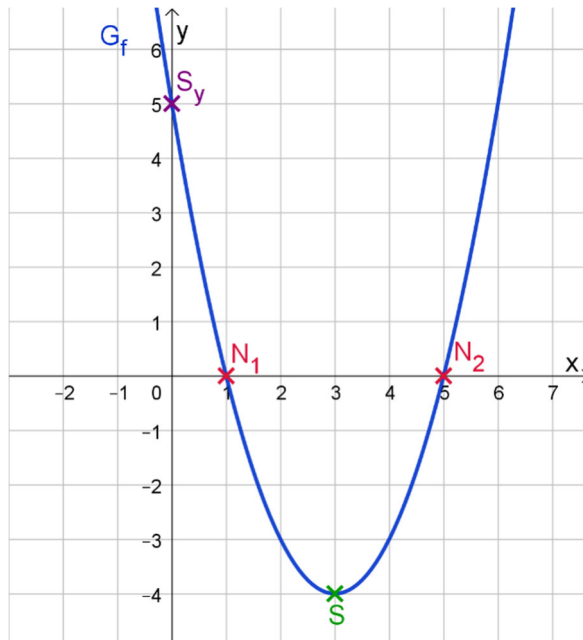
$d < 0$ Verschiebung in positive x-Richtung



$e > 0$ Verschiebung in positive y-Richtung

$e < 0$ Verschiebung in negative y-Richtung

Allgemeine Form: $f(x) = ax^2 + bx + c \quad x, a, b, c \in \mathbb{R}$



Der Graph G_f ist eine **Parabel**.

a ist der **Streckungsfaktor**; es gilt:

- $a > 0$: Parabel ist nach oben geöffnet
- $a < 0$: Parabel ist nach unten geöffnet
- $a = 1$ oder $a = -1$: Normalparabel
und
- $|a| > 1$: Parabel ist schlanker als die
Normalparabel, **gestreckt**
- $|a| < 1$: Parabel ist breiter als die
Normalparabel, **gestaucht**

Der tiefste / höchste Punkt heißt **Scheitelpunkt S**.
Die **Nullstellen N** sind die Schnittpunkte mit der x-Achse, S_y ist der Schnittpunkt mit der y-Achse (vgl. c im Term).

Scheitelpunktform

$$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$$

Den Scheitelpunkt $S(x_s | y_s)$ kann man direkt ablesen.

Umformung von der Normalform in Scheitelpunktform durch **quadratische Ergänzung**

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 4x - 2 \\ &= 2(x^2 - 2x - 1) && a=2 \text{ ausklammern} \\ &= 2(x^2 - 2x + 1 - 1 - 1) && \text{Ergänzen} \\ &= 2(x^2 - 2x + 1) + 2(-1 - 1) \text{ „aufteilen“} \\ &= 2(x - 1)^2 - 4 \end{aligned}$$

Aussagen über den Funktionsgraphen:

- $S(1 | -4)$
- G_f ist nach oben geöffnet und schmaler als die Normalparabel, da $a = 2$

Faktorisierte- / Nullstellenform

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

x_1 und x_2 sind die Nullstellen der quadratischen Funktion; die x-Koordinate des Scheitelpunkts liegt in der Mitte der Nullstellen.

Beispiel:

$$f(x) = 0,25(x - 2)x(x + 5)$$

Aussagen über den Funktionsgraphen:

- Nullstellen bei 2 und -5
- x-Koordinate des Scheitelpunkts bei $x_s = \frac{2-5}{2} = -1,5$
- $a = 0,25$: Parabel ist nach oben geöffnet und weiter als die Normalparabel

Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$ heißen **quadratische Gleichungen**.

Lösungsmöglichkeiten:

1. Ist $b = 0$, dann isolieren von x $\rightarrow ax^2 + c = 0$

Beispiel: $4x^2 - 36 = 0 \quad \rightarrow 4x^2 = 36 \quad \rightarrow x^2 = 9 \quad \rightarrow x_1 = 3 ; x_2 = -3$

2. Ist $c = 0$, dann faktorisieren $\rightarrow ax^2 + bx = 0$

Beispiel: $3x^2 + 5x = 0 \quad \rightarrow x(3x + 5) = 0$

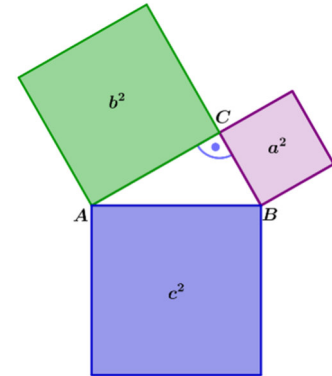
$$\begin{array}{ccccc}
 & \searrow & & \searrow & \\
 x_1 = 0 & & 3x + 5 = 0 & \rightarrow 3x = -5 & x_2 = -\frac{5}{3}
 \end{array}$$

3. Immer gilt die Mitternachtsformel: $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Bei einem rechtwinkligen Dreieck haben die Quadrate über den Katheten zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

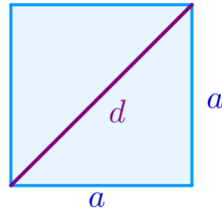


Anwendungen:

Diagonale im Quadrat

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$\rightarrow d = a\sqrt{2}$$

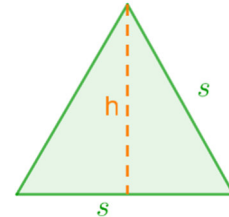


Höhe im gleichseitigen Dreieck

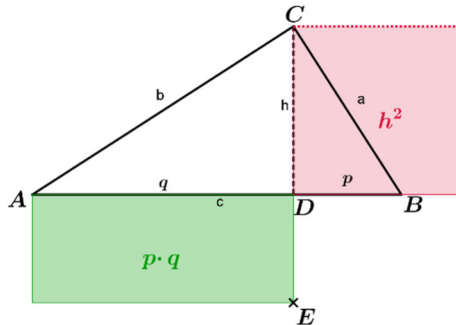
$$h^2 + \left(\frac{1}{2}s\right)^2 = s^2$$

$$\rightarrow h^2 = \frac{3}{4}s^2$$

$$\rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}s$$



Der Höhensatz



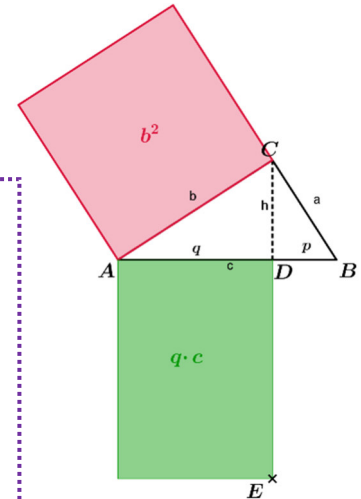
Bei einem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über der Höhe den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten:

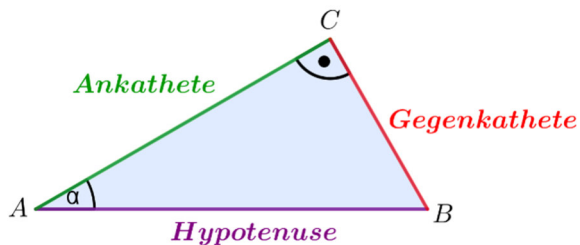
$$h^2 = p \cdot q$$

Der Kathetensatz

Bei einem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über einer Kathete den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus dem anliegenden Hypotenusenabschnitt und der Hypotenuse:

$$a^2 = p \cdot c \text{ und } b^2 = q \cdot c$$





Besondere Winkel und Zusammenhänge

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1 \text{ und } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

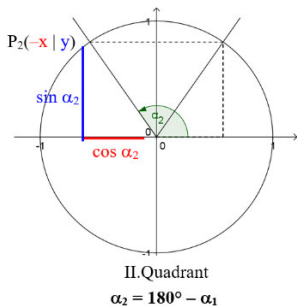
$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

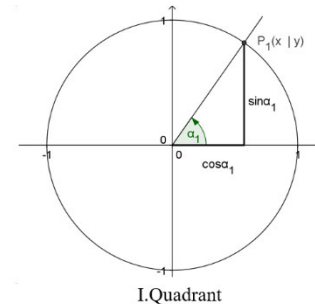
$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.definiert

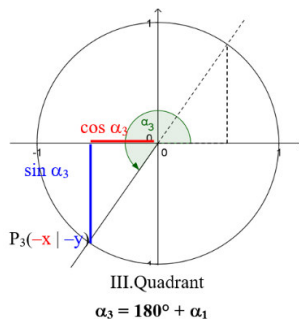
$$90^\circ < \alpha_2 < 180^\circ$$



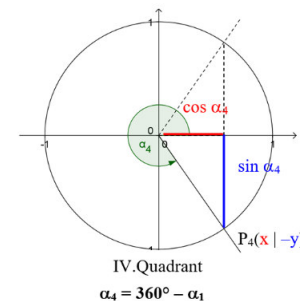
$$0^\circ < \alpha_1 < 90^\circ$$



$$180^\circ < \alpha_3 < 270^\circ$$



$$270^\circ < \alpha_4 < 360^\circ$$



Der Sinussatz

In jedem Dreieck ABC verhalten sich die Längen zweier Seiten wie die Sinuswerte ihrer Gegenwinkel:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

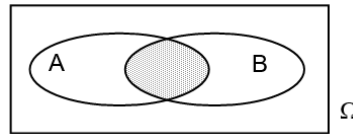
Der Kosinussatz

In einem Dreieck ABC gelten zwischen den Seitenlängen und den Größen der Innenwinkel folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \end{aligned}$$

Die **Schnittmenge** besteht aus allen Ergebnissen, bei denen beide Ereignisse A und B zugleich eintreten.

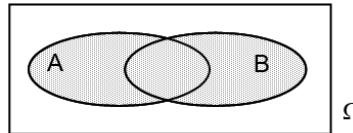
Schreibweise: **$A \cap B$**



	B	$\bar{B}$
A		
$\bar{A}$		

Die **Vereinigungsmenge** besteht aus allen Ergebnissen, bei denen mindestens eines der beiden Ereignisse A und B eintritt.

Schreibweise: **$A \cup B$**



	B	$\bar{B}$
A		
$\bar{A}$		

In den Zellen der Vierfeldertafel können absolute oder relative Häufigkeiten stehen.

Der Additionssatz:

Für zwei Ereignisse A und B aus der Ergebnismenge Ω gilt:

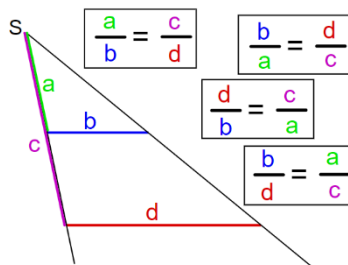
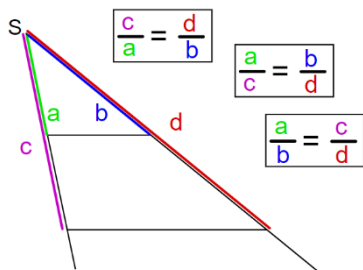
$$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Zwei Figuren sind zueinander ähnlich, wenn man sie durch maßstäbliches Vergrößern oder Verkleinern in zueinander kongruente Figuren überführen kann: $A \sim B$

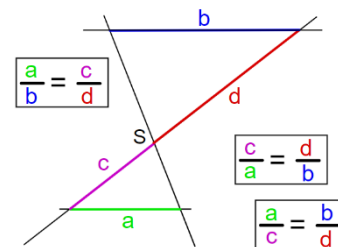
Ähnliches Figuren besitzen die gleiche Form. Sie stimmen im Verhältnis der entsprechenden Seiten und in der Größe der entsprechenden Winkel überein.

Strahlensätze

V-Figur



X-Figur

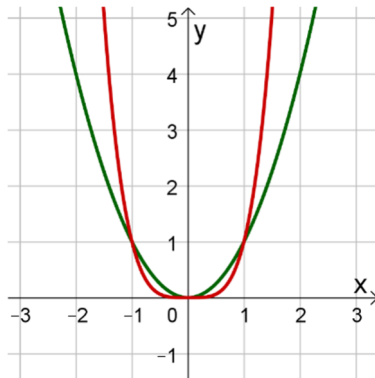


(Quellen: File:English Strahlensatz 2018-06-21 05.svg - Wikimedia Commons, ohne Änderung; Datei:Deutsch Strahlensatz 2018-06-21 03.svg - Wikimedia Commons, ohne Änderung; File:English Strahlensatz 2018-06-21 01.svg - Wikimedia Commons, ohne Änderung)

Eine Funktion $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$, $D = \mathbb{R}$ heißt **Potenzfunktion vom Grad n** .

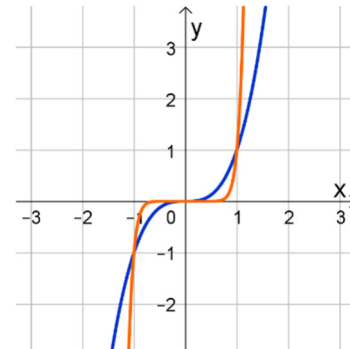
n gerade

- $D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}_0^+$
- Graph verläuft im I. und II. Quadranten
- achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse
- $x < 0$: G_f monoton fallend
- $x > 0$: G_f monoton steigend



n ungerade

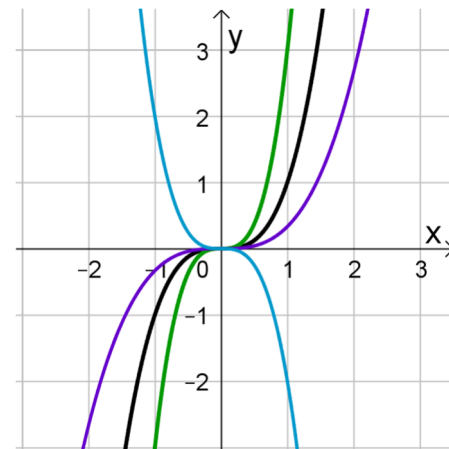
- $D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}$
- Graph verläuft im I. und III. Quadranten
- punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs
- G_f monoton steigend für alle x



Allgemein: $f(x) = ax^n$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$

- $0 < |a| < 1$ Stauchung in y-Richtung
- $1 < |a|$ Streckung in y-Richtung

Für $a < 0$ wird der Graph zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.



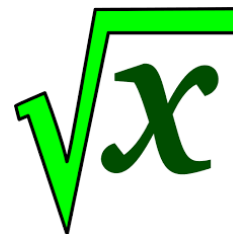
$\sqrt[n]{a}$ aus der nicht negativen Zahl a ist diejenige nicht negative Wurzel, deren n -te Potenz a ergibt:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

Beispiele:

$$\sqrt[3]{8} = 2, \text{ da } 2^3 = 8$$

$$\sqrt[4]{625} = 5, \text{ da } 5^4 = 625$$



Potenzgleichungen:

Die Gleichung der Form $x^n = a$ hat entweder **keine, eine oder zwei Lösungen**.

	n gerade	n ungerade	Beispiele
$a > 0$	$\mathbb{L} = \{\pm \sqrt[n]{a}\}$	$\mathbb{L} = \{\sqrt[n]{a}\}$	$x^4 = 2 \rightarrow \mathbb{L} = \{\pm \sqrt[4]{2}\}, x^3 = 8 \rightarrow \mathbb{L} = \{2\}$
$a = 0$	$\mathbb{L} = \{0\}$	$\mathbb{L} = \{0\}$	$x^3 = 0 \rightarrow \mathbb{L} = \{0\}$
$a < 0$	$\mathbb{L} = \{ \}$	$\mathbb{L} = \{-\sqrt[n]{a}\}$	$x^5 = -3 \rightarrow \mathbb{L} = \{-\sqrt[5]{3}\}, x^4 = -16 \rightarrow \mathbb{L} = \{ \}$

Klasse 9**Potenzen mit rationalen Exponenten**

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

Beispiele: $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$ $6^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{6^3} = \sqrt{6^3} = 6\sqrt{6}$

	Rechenregeln	Beispiele
Multiplizieren (gleiche Basis)	Exponenten addieren	$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$
Dividieren (gleiche Basis)	Exponenten subtrahieren	$5^4 : 5^3 = 5^{4-3} = 5^1 = 5$
Potenzieren von Potenzen	Exponenten multiplizieren	$(4^2)^3 = 4^{2 \cdot 3} = 4^6$
Multiplizieren (gleicher Exponent)	Exponent ausklammern	$5^2 \cdot 8^2 = (5 \cdot 8)^2 = 40^2$
Dividieren (gleicher Exponent)	Exponent ausklammern	$\frac{3^3}{7^3} = \left(\frac{3}{7}\right)^3$
Addieren und Subtrahieren	Zusammenfassen nur bei gleichartigen Termen	$2a^3 - 5a^2 + 7a^3 = 9a^3 - 5a^2$