

Brüche beschreiben Bruchteile bzw. Anteile.



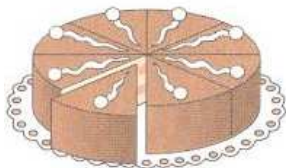
$$\frac{4}{5}$$

Der **Zähler** gibt an, dass 4 solcher Teile genommen werden.

Bruchstrich

Der **Nenner** gibt an, dass das Ganze in 5 gleich große Teile geteilt wird.

$$\frac{7}{8} \text{ von } 1 \text{ kg} = \left(\frac{1}{8} \text{ von } 1 \text{ kg}\right) \cdot 7 = (1000 \text{ g} : 8) \cdot 7 = 125 \text{ g} \cdot 7 = 875 \text{ g}$$



Der Kuchen ist in 8 Stücken geteilt, d.h. ein Stücken entspricht dem Anteil:

$$\frac{1}{8}$$

Anteile werden häufig in **Prozent** angegeben: $40 \% = \frac{40}{100}$

Das **Prozentzeichen %** steht für $\frac{1}{100}$.

„1 Prozent“ heißt „1 Hundertstel“.

Sehr kleine Anteile (kleiner als 1 %) werden oft in Promille angegeben.

Promille (‰) ist eine abkürzende Bezeichnung für Tausendstel.

$$1 \text{ ‰} = \frac{1}{1000} = 0,001 = 0,1 \%$$

Häufig vorkommende Prozente:

$$1 = 100 \%$$

$$\frac{1}{2} = 50 \%$$

$$\frac{1}{4} = 25 \%$$

$$\frac{3}{4} = 75 \%$$

$$\frac{1}{5} = 20 \%$$

$$\frac{2}{5} = 40 \%$$

$$\frac{3}{5} = 60 \%$$

$$\frac{4}{5} = 80 \%$$

$$\frac{1}{10} = 10 \%$$

$$\frac{3}{10} = 30 \%$$

$$\frac{7}{10} = 70 \%$$

$$\frac{9}{10} = 90 \%$$



Ein Bruch wird **erweitert**, indem Zähler und Nenner mit **derselben** natürlichen Zahl multipliziert werden.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot \mathbf{3}}{4 \cdot \mathbf{3}} = \frac{9}{12}$$

Die Umkehrung des Erweiterns heißt **kürzen**. Dabei werden Zähler und Nenner des Bruchs durch **dieselbe** natürliche Zahl dividiert.

$$\frac{9}{12} = \frac{9 : \mathbf{3}}{12 : \mathbf{3}} = \frac{3}{4}$$

Beim Erweitern und Kürzen verändert sich der Wert des Bruches nicht.

Erweitern

$$\frac{2}{9} = \frac{2 \cdot \mathbf{5}}{9 \cdot \mathbf{5}} = \frac{5}{20} ; \frac{5}{8} = \frac{5 \cdot \mathbf{125}}{8 \cdot \mathbf{125}} = \frac{625}{1000}$$

Kürzen

$$\frac{18}{42} = \frac{18 : \mathbf{6}}{42 : \mathbf{6}} = \frac{3}{7} ; \frac{24}{60} = \frac{24 : \mathbf{12}}{60 : \mathbf{12}} = \frac{2}{5}$$



**Mit 0 darf man nicht
erweitern oder
kürzen.**

Ein **Bruch** ist ein Quotient, wobei der Bruchstrich für das Divisionszeichen steht.

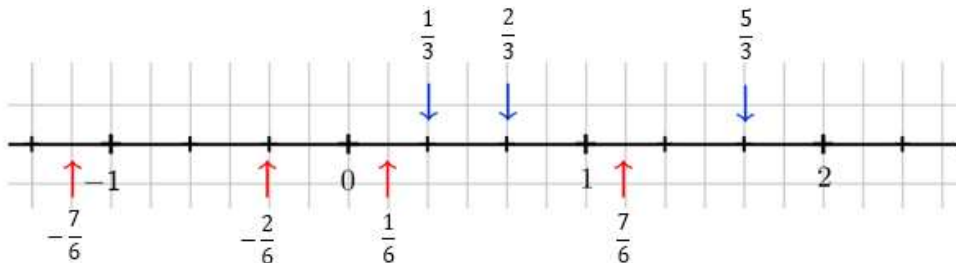
Den **Quotienten** $z : n$ zweier natürlicher Zahlen kann man auch als **Bruch** $\frac{z}{n}$ schreiben.

$$4 : 6 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$0 : 3 = \frac{0}{3} = 0$$

$$15 : 1 = \frac{15}{1} = 15$$

Ein Bruch stellt eine Zahl dar, diese wird als **Bruchzahl** bezeichnet. Jedem Bruch kann somit ein Punkt auf der Zahlengeraden zugeordnet werden. Wie für die ganzen Zahlen gilt: Je weiter rechts eine Bruchzahl auf der Zahlengeraden eingetragen ist, desto größer ist sie.



Jeder Bruchzahl können mehrere Brüche zugeordnet werden, z.B. $\frac{1}{6} = \frac{2}{12} = \frac{3}{18}$

Die Menge aller positiven und negativen Bruchzahlen und die Null bilden die Menge der **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$.

Zahlenmengen:

$\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen;

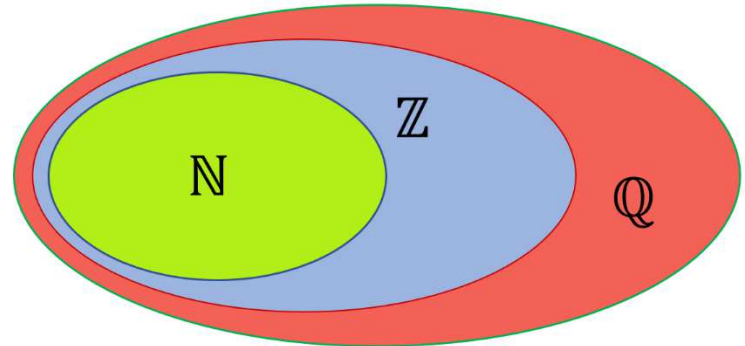
$$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$$

$\mathbb{Z}$ Menge der ganzen Zahlen;

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$$

$\mathbb{Q}$ Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \dots; -2; \dots; -\frac{3}{2}; \dots; -1; \dots; -0,5; \dots; 0; \dots; \frac{1}{4}; \dots; 1; \dots; 1,7; \dots; 2\frac{1}{2}; \dots \right\}$$



Brüche, die den **gleichen Nenner** haben, heißen **gleichnamig**. Bei gleichnamigen Brüchen stellt der Bruch mit dem größeren Zähler den größeren Anteil dar.

$$\frac{5}{9} > \frac{4}{9}$$

Bei Brüchen, die den **gleichen Zähler** haben, stellt derjenige Bruch den größeren Anteil dar, der den kleineren Nenner hat.

$$\frac{4}{9} < \frac{4}{5}$$

Vergleiche Brüche, indem du sie durch Erweitern oder Kürzen auf denselben Nenner oder Zähler bringst.

$$\frac{5}{12} = \frac{15}{36} \quad \text{und} \quad \frac{7}{18} = \frac{14}{36} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{12} > \frac{7}{18}$$

Klasse 6

Hauptnenner



Der **Hauptnenner** zweier oder mehrerer Brüche ist der kleinstmögliche gemeinsame Nenner, den du durch Umformen (Erweitern) erhältst (**kleinstes gemeinsames Vielfaches kgV**).

Um den Hauptnenner zu finden, gibt es zwei Möglichkeiten:

(1) systemisches Probieren:

die **Betrachtung der Vielfachen** des größten Nenners

(2) **Primfaktorzerlegung** der Nenner

Hauptnenner der Brüche $\frac{4}{30}$ und $\frac{5}{12}$

Der Hauptnenner muss ein Vielfaches beider Nenner sein. Betrachte zunächst die Vielfachen des größeren Nenners:

30, 60, 90, ...

Da 60 die kleinste Zahl ist, die auch ein Vielfaches von 12 ist, ist 60 der gesuchte Hauptnenner.

$$\frac{4}{30} = \frac{4 \cdot 2}{30 \cdot 2} = \frac{8}{60}; \quad \frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{25}{60}$$

Zerlege beide Nenner in Primfaktoren.

Im Hauptnenner müssen die Primfaktoren beider Nenner vorkommen.

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \quad \rightarrow \text{mit 2 erweitern}$$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \quad \rightarrow \text{mit 5 erweitern}$$

$$\text{HN: } 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

Zahlen, die mindestens eine **Nachkommastelle** haben, heißen **Dezimalbrüche / Dezimalzahlen**.
Das Komma trennt die **Dezimalstellen** von den ganzen Zahlen.

...	Tausend (T)	Hundert (H)	Zehner (Z)	Einer (E)	,	Zehntel (z)	Hundertstel (h)	...
	1000	100	10	1		$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	
			1	2	,	0	8	3

Sprechweise: Die Stellen hinter dem Komma werden einzeln gesprochen.
z.B. „Zwölf Komma null acht drei“.

Schreibweisen: $12,083 = 1Z + 2E + 0z + 8h + 3t = 10E + 2E + 80t + 3t = 12E + 83t = 12 \frac{83}{1000}$

Dezimalbruch/ Dezimalzahl
Bruch

Bei der Umwandlung von Brüchen mit einer Stufenzahl im Nenner gibt die **Anzahl der Endnullen** des Nenners die **Anzahl der Dezimalstellen** an.

Die **Ziffern des Dezimalbruchs** entsprechen den **Zähler des Bruchs**.

1) Nenner ist eine Stufenzahl:

$$\frac{3}{10} = 0,3$$

$$\frac{64}{1000} = 0,064$$

$$\frac{17}{100} = 0,17$$

2) Nenner ist keine Stufenzahl:

$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0,75$$

erweitere den Bruch so, dass im Nenner eine Stufenzahl steht.

$$\frac{49}{140} = \frac{7}{20} = \frac{35}{100} = 0,35$$

manchmal ist es sinnvoll vor dem Erweitern zu kürzen.

3) **schriftliches Dividieren** (Division ohne Rest endlicher Dezimalbruch, ansonsten unendlicher Dezimalbruch)

$$\frac{1}{8} = 1 : 8 = 0,125$$

echter Bruch: der Zähler ist kleiner als der Nenner;

$$\frac{2}{5}$$

Stammbruch: der Zähler ist 1;

$$\frac{1}{3}$$

unechter Bruch: der Zähler ist größer als der Nenner;

$$\frac{7}{3}$$

gemischte Zahl: setzt sich aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruch zusammen;

$$2\frac{1}{3}$$

endlicher Dezimalbruch: enthält der Nenner eines vollständig gekürzten Bruchs nur die Primfaktoren 2 und 5;

unendlicher periodischer Dezimalbruch: kein endlicher Dezimalbruch;

$$\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0,33333 \dots = 0,\overline{3}; \quad \frac{1}{6} = 0,1666 \dots = 0,1\overline{6}$$

$0, \overline{4}$; $4, \overline{26}$ und $0, \overline{375}$ heißen **rein periodische Dezimalbrüche**. Die Periode beginnt sofort hinter dem Komma.

$0,7\overline{2}$ und $1,274\overline{5}$ heißen **gemischt periodische Dezimalbrüche**.

Zwischen Komma und Periode sind eine oder mehrere Ziffern, die nicht zur Periode gehören.

Umwandlung rein periodischer Dezimalbrüche in Brüche:

1. Schreibe die sich wiederholenden Ziffern in den Zähler
2. Ermittle die Periodenlänge. Die Zahl im Nenner besteht aus so vielen Neunern.

$$0, \overline{5} = \frac{5}{9}$$

$$0, \overline{23} = \frac{23}{99}$$

$$0, \overline{005} = \frac{5}{999}$$

$$0, \overline{147} = \frac{147}{999}$$

Vor dem **Runden** von Dezimalbrüchen muss man festlegen, wie viele Nachkommastellen die gerundete Zahl haben soll.

Rundungsstelle

z.B. **Hundertstel**

$$\begin{array}{c}
 \downarrow \\
 4,5\mathbf{2}96 \approx 4,53 \\
 \uparrow \\
 4,5\mathbf{2}36 \approx 4,52
 \end{array}$$

Steht rechts von der Rundungsstelle eine 5, 6, 7, 8 oder 9, so wird **aufgerundet**.

Steht rechts von der Rundungsstelle eine 0, 1, 2, 3 oder 4, so wird **abgerundet**.

Nach dem Runden entfallen die restlichen Nachkommastellen.

Runde den Dezimalbruch 3,954 auf:

Einer (E)

$$3,954 \approx \mathbf{4}$$

eine Dezimale (1 D)

$$3,954 \approx 4,\mathbf{0}$$

Hundertstel (h)

$$3,954 \approx 3,9\mathbf{5}$$

Absolute und relative Häufigkeiten werden bei der Auswertung von Daten verwendet. Die **absolute Häufigkeit** ist die Anzahl, wie oft ein Ergebnis vorkommt. Die zugehörige **relative Häufigkeit** ist der Anteil der absoluten Häufigkeit an der Gesamtzahl.

$$\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Gesamtzahl}}$$

Relative Häufigkeiten werden oft in Prozentschreibweise angegeben.

	Bus	Fahrrad	zu Fuß	Auto (mit den Eltern)
Anzahl der Schülerinnen und Schüler	10	8	5	2
Anteil der Schülerinnen und Schüler	$\frac{10}{25} = 40 \%$	$\frac{8}{25} = 32 \%$	$\frac{5}{25} = 20 \%$	$\frac{2}{25} = 8 \%$

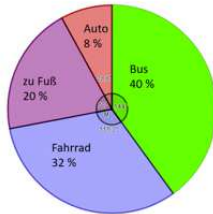
absolute Häufigkeit

relative Häufigkeit

Gesamtzahl

Anteile lassen sich gut durch **Diagramme** veranschaulichen.

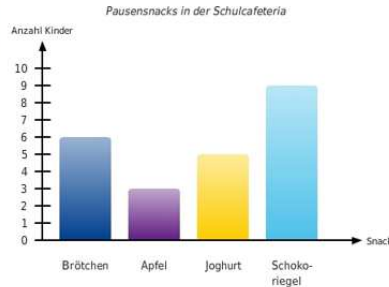
Beim **Kreisdiagramm** entspricht die Größe des Mittelpunktswinkels dem jeweiligen Anteil, beim **Streifendiagramm** entspricht die Länge der Abschnitte dem jeweiligen Anteil und beim **Säulendiagramm** entspricht die Höhe der Säulen dem jeweiligen Anteil.



Kreisdiagramm

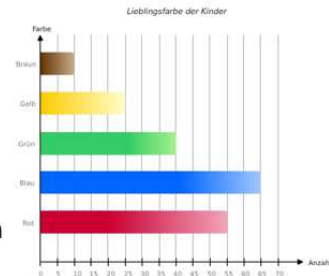


Streifendiagramm



Säulendiagramm

Balkendiagramm



Berechnung des Mittelpunktswinkels in einem Kreisdiagramm:

$$35 \% \text{ von } 360^\circ = \frac{35}{100} \cdot 360^\circ = 35 \cdot 3,6^\circ = 126^\circ$$

Haben zwei Brüche den gleichen Nenner, nennt man sie **gleichnamig**. Will man gleichnamige Brüche addieren / subtrahieren, muss man nur die **Zähler addieren / subtrahieren** und den **gemeinsamen Nenner beibehalten**.

Gleiche Nenner:

$$\frac{13}{24} + \frac{5}{24} = \frac{13+5}{24} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

vollständig Kürzen

$$\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5-3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Verschiedene Nenner:



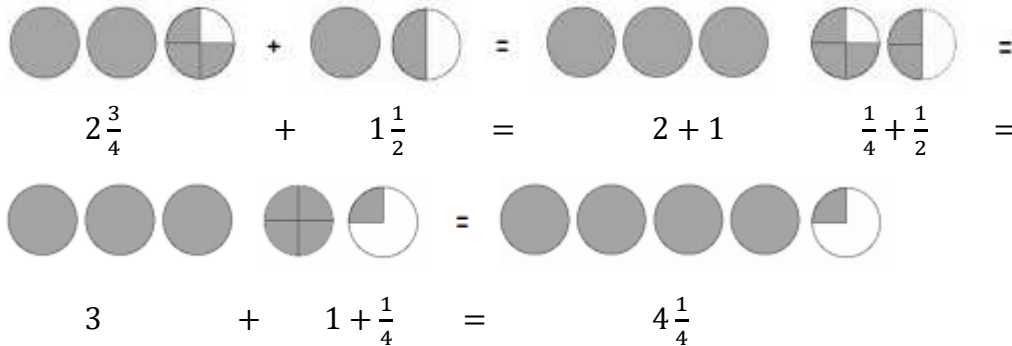
1. Hauptnenner finden und Brüche gleichnamig machen
2. Addiere / subtrahiere die Zähler und behalte den gemeinsamen Nenner bei

$$\frac{5}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8} + \frac{2}{8} = \frac{7}{8}$$

Erweitern

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{8} = \frac{20}{24} - \frac{9}{24} = \frac{11}{24}$$

Addiere zwei gemischte Zahlen, indem du die Ganzen zu den Ganzen und die Brüche zu den Brüchen addierst.



Sollen gemischte Zahlen subtrahiert werden, muss man sich manchmal beim Ganzen des Minuenden eine 1 ausleihen, damit man die Brüche subtrahieren kann.

$$7\frac{1}{5} - 2\frac{3}{5} = 6\frac{6}{5} - 2\frac{3}{5} = (6 - 2) + \left(\frac{6}{5} - \frac{3}{5}\right) = 4\frac{3}{5}$$

Begründung: Umwandlung möglich, da $1 = \frac{5}{5} \rightarrow 7 = 6\frac{5}{5}$

1) Man multipliziert einen Bruch mit einer natürlichen Zahl

Ein Bruch wird mit einer natürlichen Zahl multipliziert, indem man den **Zähler mit dieser Zahl multipliziert** und den Nenner beibehält.

$$3 \cdot \frac{5}{17} = \frac{3 \cdot 5}{17} = \frac{15}{17}$$

2) Man multipliziert eine gemischte Zahl mit einer natürlichen Zahl

Eine gemischte Zahl muss zuerst in einen **unechten Bruch** umgewandelt werden und dann genauso multiplizieren wie bei 1).

$$3\frac{1}{5} \cdot 2 = \frac{16}{5} \cdot 2 = \frac{16 \cdot 2}{5} = \frac{32}{5} = 6\frac{2}{5}$$

3) Man multipliziert einen Bruch mit einem Bruch

Brüche werden miteinander multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{4}{15}$$

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} = \frac{5 \cdot 9}{6 \cdot 10} \stackrel{\text{Kürzen}}{=} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$$

Regel in Reimform:
Das Multiplizieren, das ist echt der Renner:
Nimm Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner!

1) Bruch dividiert mit einer natürlichen Zahl

Ein Bruch wird durch eine natürliche Zahl dividiert, indem man den **Zähler beibehält** und den **Nenner mit dieser Zahl multipliziert**.

$$\frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$$

2) gemischte Zahl dividieren mit einer natürlichen Zahl.

Eine gemischte Zahl muss zuerst in einen **unechten Bruch** umgewandelt werden und dann die Regel 1) verwenden.

$$6\frac{1}{4} : 2 = \frac{25}{4} : 2 = \frac{25}{4 \cdot 2} = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$$

3) Bruch / Zahl dividiert mit einem Bruch

Man dividiert einen Bruch / Zahl durch einen Bruch, indem man den **Kehrbruch des Divisors multipliziert**.

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$5 : \frac{2}{3} = 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$$

1) Addition und Subtraktion

Dezimalbrüche werden **stellenwertgerecht** addiert / subtrahiert. Beim schriftlichen Addieren / Subtrahieren **Komma unter Komma**.

$$\begin{array}{r} 15,845 \\ +22,555 \\ \hline 38,400 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 75,875 \\ -22,345 \\ \hline 53,530 \end{array}$$

2) Multiplikation

- Multiplizieren ohne Beachtung der Kommas.
- Das Ergebnis muss so viele Nachkommastellen haben, wie die Summe der einzelnen Nachkommastellen.

$$0,3 \cdot 0,4 = 0,12$$

$$1,75 \cdot 0,85 = 1,4875$$

3) Division

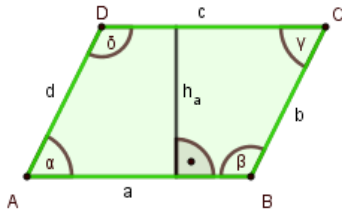
- Verschieben des Kommas beim Dividenden und Divisors nach rechts, bis der **Divisor eine natürliche Zahl** ist.
- Setze ein Komma beim Ergebnis, wenn man das Komma im Dividenden überschreitet.

$$0,24 : 6 = 0,04$$

$$4,86 : 1,2 = 48,6 : 12 = 4,05$$

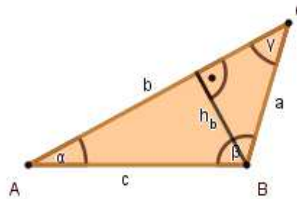
g steht für die Grundseite, h_i für die Höhe auf der jeweiligen Grundseite i .

1) Parallelogramm



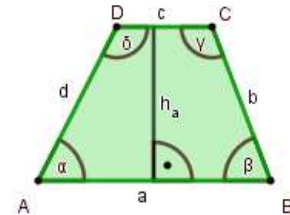
$$A_P = g \cdot h_g$$

2) Dreieck



$$A_D = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$$

3) Trapez



$$A_T = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$$

Geg.: $a = 4,5 \text{ cm}$
 $h_a = 1,6 \text{ mm}$

Ges.: A_P

Lsg.: $A_P = a \cdot h_a$
 $= 4,5 \text{ cm} \cdot 1,6 \text{ mm}$
 $= 7,2 \text{ cm}^2$

Geg.: $b = 3,2 \text{ mm}$
 $h_b = 4,4 \text{ mm}$

Ges.: A_D

Lsg.: $A_D = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$
 $= \frac{1}{2} \cdot 3,2 \text{ mm} \cdot 4,4 \text{ mm}$
 $= 7,0 \text{ mm}^2$

Geg.: $a = 2,4 \text{ cm}$
 $c = 4 \text{ cm}$
 $h_a = 1,5 \text{ mm}$

Ges.: A_T

Lsg.: $A_T = 0,5 \cdot (a + c) \cdot h_a$
 $= 0,5 \cdot (2,4 \text{ cm} + 4 \text{ cm}) \cdot 1,5 \text{ mm}$
 $= 4,8 \text{ cm}^2$

Klasse 6

Umrechnung von Länge, Fläche und Volumen



Länge

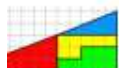
Umrechnungszahl 10

$$1\text{km} = 1000\text{m}$$

$$1\text{m} = 10\text{dm}$$

$$1\text{dm} = 10\text{cm}$$

$$1\text{cm} = 10\text{mm}$$



Fläche

Umrechnungszahl 100

$$1\text{km}^2 = 100\text{ha}$$

$$1\text{ha} = 100\text{a}$$

$$1\text{a} = 100\text{m}^2$$

$$1\text{m}^2 = 100\text{dm}^2$$

$$1\text{dm}^2 = 100\text{cm}^2$$

$$1\text{cm}^2 = 100\text{mm}^2$$



Volumen

Umrechnungszahl 1000

$$1\text{m}^3 = 1000\text{dm}^3$$

$$1\text{dm}^3 = 1000\text{cm}^3$$

$$1\text{cm}^3 = 1000\text{mm}^3$$

Speziell:

$$1\text{l} = 1\text{dm}^3$$

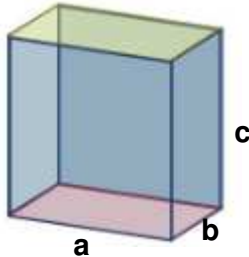
$$1\text{ml} = 1\text{cm}^3$$

$$1\text{hl} = 100\text{l}$$

$$1\text{l} = 1000\text{ml}$$

Der **Oberflächeninhalt O** eines Körpers ist gleich dem **Flächeninhalt seines Netzes**.

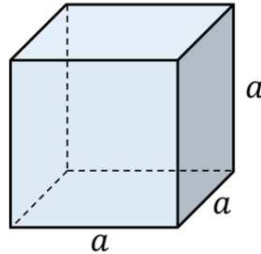
Quader



$$O_Q = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$$

$$V_Q = l \cdot b \cdot h = a \cdot b \cdot c$$

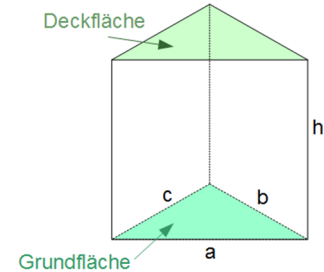
Würfel



$$O_W = a \cdot a \cdot 6 = a^2 \cdot 6$$

$$V_W = a \cdot a \cdot a = a^3$$

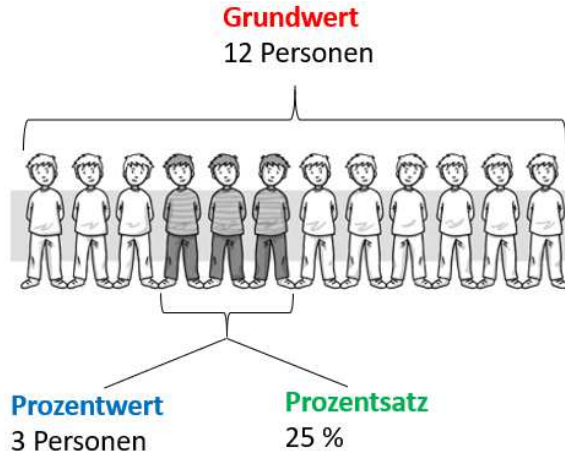
Prisma



$$O_P = 2 \cdot G + M$$

$$M = U_G \cdot h$$

$$V_P = G \cdot h_K$$



Prozentwert PW:

absolute Häufigkeit

Grundwert GW:

„das Ganze“

Prozentsatz PS:

relative Häufigkeit
(Anteil)

Der Zusammenhang wird in der **Grundgleichung der Prozentrechnung** beschrieben:

$$\text{Prozentsatz} \cdot \text{Grundwert} = \text{Prozentwert}$$



Klasse 6

Prozentrechnung – Aufgabentypen



$$\text{Prozentsatz} \cdot \text{Grundwert} = \text{Prozentwert}$$

Prozentsatz gesucht

9600 von 24000 Plätzen
eines Stadions sind
überdacht. Berechne den
Anteil der überdachten
Plätze.

Geg.: $PW = 9600$
 $GW = 24000$

Ges.: PS

Lsg.: $PS = PW : GW$
 $PS = 9600 : 24000$
 $= 0,4 = 40 \%$

A: Es sind 40 % der Plätze
überdacht.

Grundwert gesucht

Der Konzerteintritt kostet im
Vorverkauf mit 36 € nur 80 %
des Preises an der Abendkasse.

Geg.: $PW = 36 \text{ €}$
 $PS = 80 \%$

Ges.: GW

Lsg.: $GW = PW : PS$
 $GW = 36 \text{ €} : 80\%$
 $= 36 \text{ €} : 0,8 = 45 \text{ €}$

A: An der Abendkasse kostet
eine Karte 45 €

Prozentwert gesucht

Luft besteht zu 21 % aus
Sauerstoff. Berechne, wie viel
Liter Sauerstoff sich in einem
Gefäß mit einem Volumen von
 140 dm^3 befindet.

Geg.: $PS = 21 \%$
 $GW = 140 \text{ dm}^3 = 140 \text{ l}$

Ges.: PW

Lsg.: $PW = PS \cdot GW$
 $PW = 0,21 \cdot 140 \text{ l}$
 $= 29,4 \text{ l}$

A: In dem Gefäß sind 29,4 l
Sauerstoff.