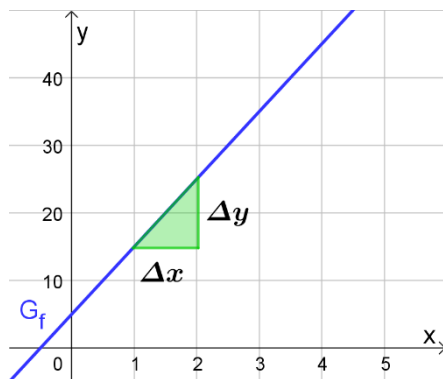


lineares Wachstum

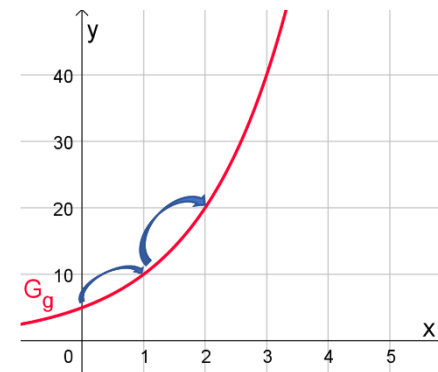
konstanter Zuwachs pro Zeiteinheit



$$f(x) = mx + t$$

exponentielles Wachstum

konstanter Wachstumsfaktor in gleichen Zeitabschnitten



$$g(x) = b \cdot a^x$$

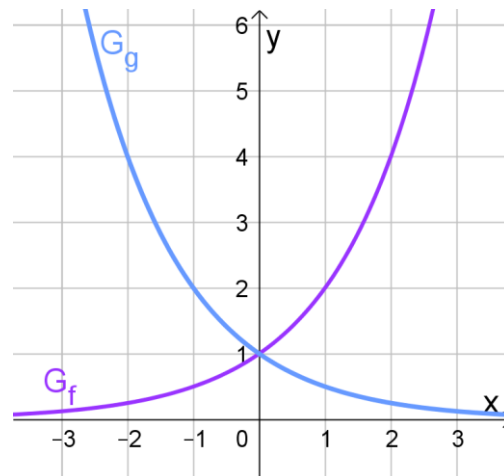
$$f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

- Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}$
- Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0 \mid 1)$
- kein Schnittpunkt mit der x-Achse
→ x-Achse ist waagrechte **Asymptote**
- Spiegelung des Graphen $f(x) = 2^x$ an der y-Achse:

$$f(-x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x} = g(x)$$

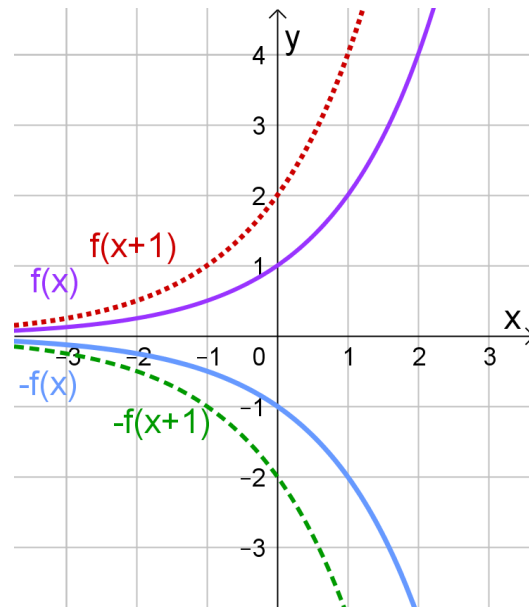
- $0 < a < 1$: **exponentielle Abnahme**
 $a > 1$: **exponentielle Zunahme**

Beispiel rechts: $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{-x}$



$$f(x) = b \cdot a^{x-c} + d \quad (a > 0, a \neq 1)$$

- **b**: Streckung / Stauchung in y-Richtung
 - $|b| > 1$: Streckung in y-Richtung
 - $|b| < 1$: Stauchung in y-Richtung
 - $b < 0$: Spiegelung an der x-Achse
- **a**: exponentielle Zu- oder Abnahme
 - $a > 1$: positives Wachstum
 - $a < 1$: negatives Wachstum
- **c**: Verschiebung in x-Richtung
 - $c > 0$: Verschiebung in positive x-Richtung
 - $c < 0$: Verschiebung in negative x-Richtung
- **d**: Verschiebung in y-Richtung
 - $d > 0$: Verschiebung in positive y-Richtung
 - $d < 0$: Verschiebung in negative y-Richtung



Der Logarithmus von b zur Basis a ist diejenige Zahl x , mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten.

$$a^x = b \quad \rightarrow \quad x = \log_a b$$

Beispiel: $2^3 = 8 \rightarrow \log_2 8 = 3$

Logarithmus ist ein Name für „Exponent zu einer bestimmten Basis“:

$$2^x = 64 \quad \rightarrow \quad x = \log_2 64 = 6$$

Rechenregel(n):

- **Potenzregel:** $\log_a(u^v) = v \cdot \log_a u$

weitere Regeln:

- **Produktregel:** $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$

- **Quotientenregel:** $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$

Es gilt außerdem: $a^0 = 1 \rightarrow \log_a 1 = 0$

Bei einer Exponentialgleichung befindet sich die Variable x im Exponenten.

$$a^x = b$$

Lösungsmöglichkeiten (als Zusatz):

Logarithmieren	Substituieren	Exponentenvergleich	Graphische Lösung
In die Form $a^x = b$ bringen und logarithmieren $5 \cdot 3^x = 3 \cdot 2^x$ $\frac{3^x}{2^x} = \frac{3}{5}$ $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{5}$ $x = \log_{1,5} 0,6$	$3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 4 = 0$ <u>Sub.:</u> $z = 3^x$ $z^2 - 5z + 4 = 0$ $z_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$ $= 4 / 1$ <u>Rücksub.:</u> $z_1 = 4 = 3^x \rightarrow x_1 = \log_3 4$ $z_2 = 1 = 3^x \rightarrow x_2 = 0$	$3^{x+1} \cdot 27^x = 9^x$ $3^{x+1} \cdot 3^{3x} = 3^{2x}$ $3^{4x+1} = 3^{2x}$ $4x + 1 = 2x$ $2x = -1$ $x = -0,5$	$3^{x+1} = 2x + 4$ $f(x)$ $g(x)$

Zufallsexperimente aus mehreren Teilerperimenten nennt man mehrstufig und werden durch Baumdiagramme veranschaulicht.



1. Pfadregel:

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten auf dem Pfad, der zu diesem Ergebnis führt.

2. Pfadregel:

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Pfadwahrscheinlichkeiten, die zu diesem Ereignis gehören.

Beispiel:

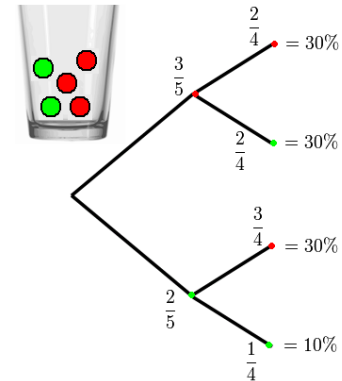
In einer Urne befinden sich drei **rote** und zwei **grüne** Kugeln. Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

$$P(\text{gr}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10} = 30\%$$

$$P(\text{zweite Kugel ist rot}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5} = 60\%$$

1. Pfadregel

2. Pfadregel



Für einen Kreisesektor mit Radius r und Mittelpunktswinkel μ gilt:

Bogenlänge: $b = \frac{\mu}{360^\circ} \cdot 2\pi r$

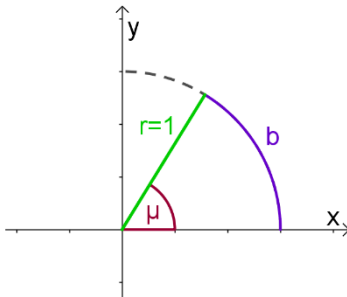
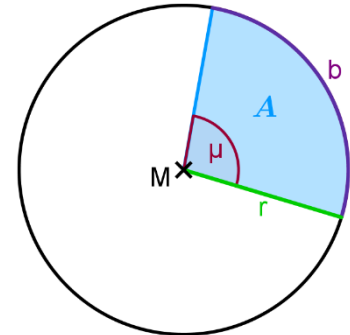
Fläche des Kreisesektors: $A = \frac{\mu}{360^\circ} \cdot \pi r^2$

Das **Bogenmaß** b des Winkels μ ist die Länge des zugehörigen Bogens im Einheitskreis:

$$b = \frac{\mu}{180^\circ} \cdot \pi$$

Besondere Werte:

Gradmaß μ	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Bogenmaß b	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

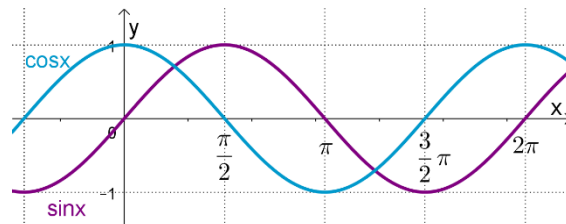


Klasse 10

Sinus- und Kosinusfunktion

Das Vorzeichen lässt sich jeweils aus der Darstellung am Einheitskreis entnehmen (vgl. GW9).

α im Gradmaß	x im Bogenmaß	$\sin x$	$\cos x$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0
180°	π	0	-1



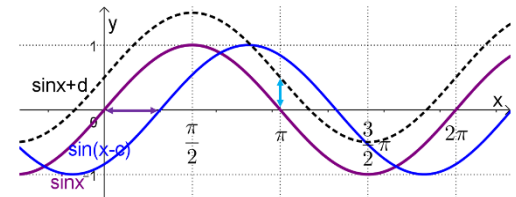
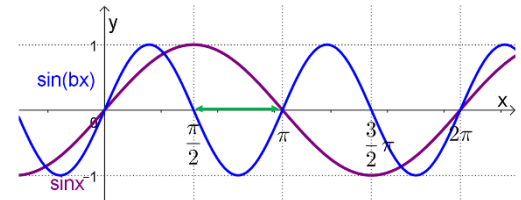
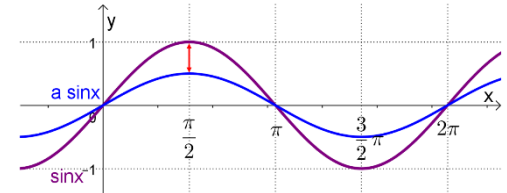
gemeinsame Eigenschaften:

Für die periodischen Funktionen gilt: $D_f = \mathbb{R}$ und $W_f = [-1; 1]$

Sonderfälle	Sinusfunktion $f(x) = \sin x$	Kosinusfunktion $g(x) = \cos x$
Nullstellen	$f(x) = \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$	$g(x) = \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$
Verschiebung	$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$	$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$
Symmetrie	punktsym. zum Ursprung: $\sin(-x) = -\sin x$	achsensym. zur y-Achse: $\cos(-x) = \cos x$

Für die allgemeine Sinusfunktion $f(x) = a \cdot \sin[b(x - c)] + d$ gilt:

- **a**: Stauchung / Streckung in y-Richtung
 - $|a| < 1$: Stauchung in y-Richtung
 - $|a| > 1$: Streckung in y-Richtung
 - $a < 0$: Spiegelung an der x-Achse
- **b**: Stauchung / Streckung in x-Richtung
 - $|b| < 1$: Streckung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{b}$
 - $|b| > 1$: Stauchung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{b}$
 - Periode: $\frac{2\pi}{b}$
- **c**: Verschiebung in x-Richtung
 - $c > 0$: Verschiebung in positive x-Richtung
 - $c < 0$: Verschiebung in negative x-Richtung
- **d**: Verschiebung in y-Richtung
 - $d < 0$: Verschiebung in negative y-Richtung
 - $d > 0$: Verschiebung in positive y-Richtung



Grad Koeffizient

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 \quad \text{mit } a_0 \neq 0$$

Polynom

ganzrationale Funktion

Verlauf des Graphen:

Koeffizient a_n		höchster Exponent n	
		gerade	ungerade
	$a_n > 0$	„von links oben nach rechts oben“ $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 2$	„von links unten nach rechts oben“ $f(x) = 4x^3 - x^2 + 2x$
	$a_n < 0$	„von links unten nach rechts unten“ $f(x) = -2x^6 + x^3 - 2 + 1$	„von links oben nach rechts unten“ $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 4$

Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades hat höchstens n Nullstellen!

Bestimmung der Nullstellen:

1) Grad $n > 2$

- Erraten der ersten Nullstelle durch systematisches Probieren
- Durchführung der Polynomdivision
- Wiederholung falls n immer noch > 2

2) Grad $n = 2$

- Nullstellenbestimmung durch die Mitternachtsformel (vgl. GW9)

Faktorierte Form / Nullstellenform: $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot \dots$

Tritt in der faktorierten Form eine Nullstelle x_k

- **ungeradzahlig** oft auf, so **wechselt** der Graph von f bei x_k das **Vorzeichen**
- **geradzahlig** oft auf, so **wechselt** der Graph von f bei x_k das **Vorzeichen nicht**.

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

Lässt sich ein Term nicht durch Ausklammern einer Potenz von x umformen, so kann man den Term auf einen quadratischen Term zurückführen.

Sub.: $u = x^2$

$$\rightarrow f(u) = u^2 - 5u + 4$$

$$f(u) = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \quad u_1 = 4; u_2 = 1$$

Rücksub.: $u_1 = 4 = x^2 \rightarrow x_1 = 2; x_2 = -2$
 $u_2 = 1 = x^2 \rightarrow x_3 = 1; x_4 = -1$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 7x + 2$$

Nullstellenbestimmung durch Polynomdivision:

$$f(2) = 0 \quad \rightarrow x_1 = 2$$

$$\rightarrow (x^3 - 6x^2 + 7x + 2) : (x - 2) = x^2 - 4x - 1$$

$$-(x^3 - 2x^2)$$

$$\begin{array}{r} -4x^2 + 7x \\ -(-4x^2 + 8x) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x + 2 \\ -(-x + 2) \end{array}$$

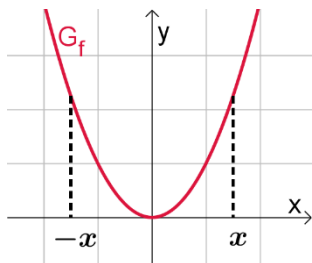
$$0$$

$$x^2 - 4x - 1 = 0$$

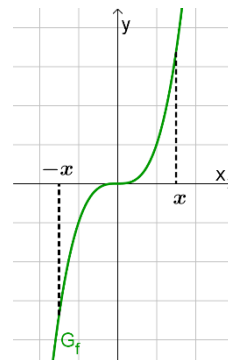
$$x_{2/3} = \frac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$



→ faktorisierte Form / Nullstellenform: $f(x) = (x - 2)(x - 2 + \sqrt{5})(x - 2 - \sqrt{5})$

Achsensymmetrie zur y-Achse

$$f(-x) = f(x)$$

Punktsymmetrie zum Ursprung

$$f(-x) = -f(x)$$

Beispiel: $f(x) = x^3 - x$

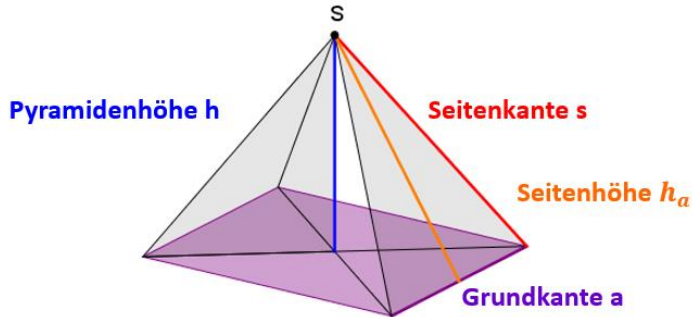
$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x \neq f(x) \quad \text{keine Achsensymmetrie}$$

$$-x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x) \quad \rightarrow \text{Punktsymmetrie zum Ursprung}$$

Merke:

Ganzrationale Funktionen sind achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn sie nur gerade Exponenten besitzen; sie sind punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn sie nur ungerade Exponenten aufweisen.

Die Pyramide

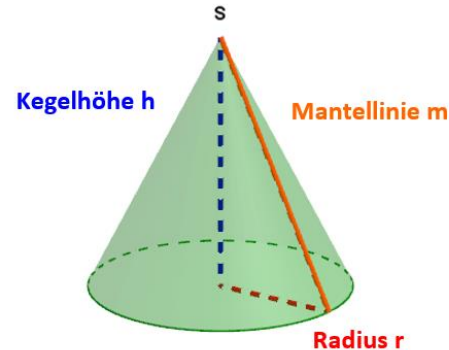


Die Oberfläche der Pyramide hängt von der Art der Grundfläche G ab.

Oberflächeninhalt: $O_{\text{Pyramide}} = G + M$

Volumen: $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} Gh$

Der Kegel



Berechnung von m mit dem Satz d. Pythagoras:

$$m = \sqrt{r^2 + h^2}$$

Oberflächeninhalt: $O_{\text{Kegel}} = G + M = \pi r^2 + \pi r m$

Volumen: $V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} Gh = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

Für eine Kugel mit Mittelpunkt M und Radius r gilt:

- **Volumen:** $V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi r^3$
- **Oberflächeninhalt:** $O_{Kugel} = 4\pi r^2$

Die Kugeloberfläche lässt sich im Gegensatz zur Oberfläche des Kegels nicht in die Ebene abwickeln.

Die Schnittkreisfläche einer Kugel berechnet sich mit der Formel $A = \pi r^2$.

