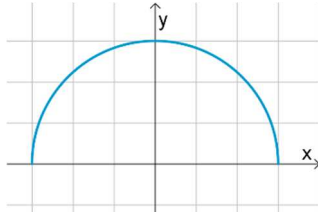
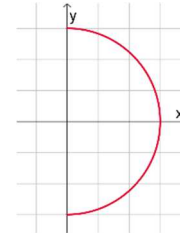


Eine Funktion $f: x \mapsto y$ ist eine **eindeutige Zuordnung**, die jedem x-Wert **genau einen** y-Wert (Funktionswert) zuordnet.

Funktion

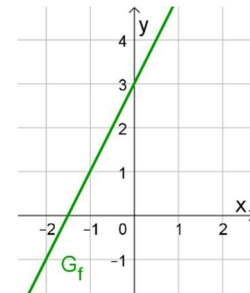


keine Funktion



Wichtige Begriffe:

- **Definitionsmenge** $\mathbb{D}_f$: Menge aller zulässigen x-Werte
- **Wertemenge** $\mathbb{W}_f$: Menge aller Funktionswerte
- eine Funktion lässt sich mithilfe einer **Wertetabelle**, durch einen **Funktionsterm** (z.B. $2x + 3$), eine **Funktionsgleichung** (z.B. $f(x) = 2x + 3$) oder einen **Graphen** G_f beschreiben
- **Nullstellen**: Schnittstellen mit der x-Achse



$$f(x) = \textcolor{red}{m}x + \textcolor{blue}{t}$$

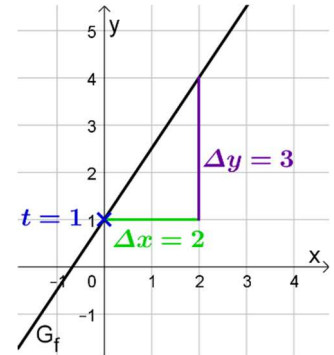
Steigung y-Achsenabschnitt

Beispiel: $f(x) = \frac{3}{2}x + 1$

- der Graph G_f ist eine Gerade
- t ist der **y-Achsenabschnitt** bzw. die Schnittstelle mit der y-Achse
- für die Steigung m gilt: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
 - $m > 0$: G_f steigt
 - $m = 0$: G_f verläuft parallel zur x-Achse
 - $m < 0$: G_f fällt
- Berechnung der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:
 - mit der x-Achse: $f(x_N) = 0 \quad \rightarrow N(x_N \mid 0)$
 - mit der y-Achse: $f(0) = y_S = t \quad \rightarrow S_y(0 \mid y_S) = S_y(0 \mid t)$

Beispiel (siehe oben): $f(x) = 0 \quad \rightarrow \frac{3}{2}x + 1 = 0 \quad \rightarrow x = -\frac{2}{3}$

$$N\left(-\frac{2}{3} \mid 0\right), S_y(0 \mid 1)$$



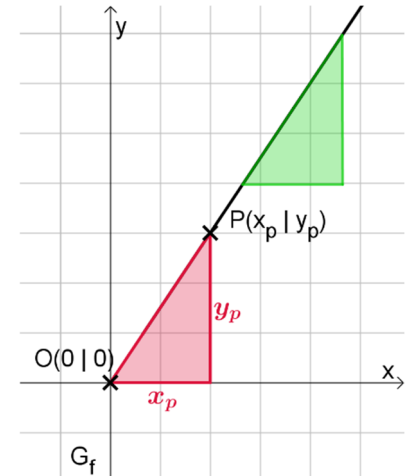
Ein Spezialfall der linearen Funktion hat die Form $f(x) = a \cdot x$ ($a \neq 0, D_f = \mathbb{Q}$) und wird als **direkte Proportionalität** (Zuordnung zweier Größen zueinander) bezeichnet.

Der Graph G_f ist eine Gerade, die durch den Ursprung verläuft (**Ursprungsgerade**).

Der Quotient $\frac{y_p}{x_p} = a$ (Quotientengleichheit) ist für alle Wertepaare

$(x_p \mid y_p)$ konstant.

a heißt **Proportionalitätsfaktor**.



**Lösungsverfahren:****1) Rechnerische Lösung:**

Lösen mithilfe einer Äquivalenzumformung (vgl. Lösen von Gleichungen)

Beispiel:

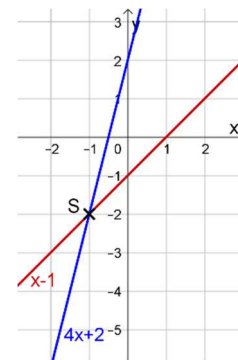
$$\begin{array}{ll} x - 1 < 4x + 2 & | -x; -2 \\ -3 < 3x & | :3 \\ -1 < x & \\ \rightarrow \mathbb{L} =] - 1; +\infty[& \end{array}$$

Werden beide Seiten einer Ungleichung mit der gleichen negativen Zahl multipliziert / dividiert, so muss das Ungleichheitszeichen umgedreht werden.

2) Graphische Lösung:

Beispiel: $x - 1 < 4x + 2$

- zeichne beide Seiten der Ungleichung als jeweilige Funktion ins KOSY
- lies den Schnittpunkt S ab
- gib die Lösungsmenge als **Intervallschreibweise** an: $\mathbb{L} =] - 1; +\infty[$ (da der rote Graph oberhalb des blauen verläuft)



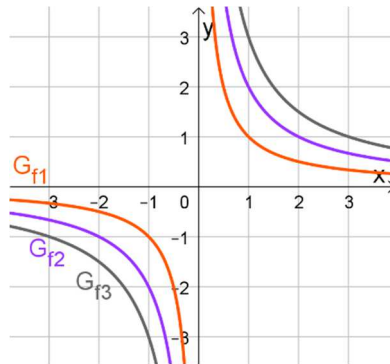
Die indirekte Proportionalität ist ein Spezialfall der gebrochen-rationalen Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = \frac{a}{x}$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $a \neq 0$.

Für alle Wertepaare $(x | y)$ folgt die **Produktgleichheit**: $a = y \cdot x$

Der Graph G_f ist eine Hyperbel mit zwei Ästen, der x-Achse als waagrechte und der y-Achse als senkrechte Asymptote.

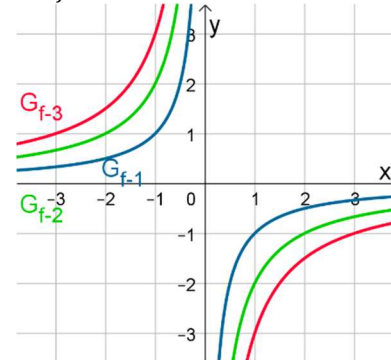
$a > 0$

Der Graph G_f verläuft im I. und III. Quadranten



$a < 0$

Der Graph G_f verläuft im II. und IV. Quadranten



Terme, bei denen eine Variable im Nenner auftritt, nennt man Bruchterme.

Beispiele: $\frac{1}{x}$; $\frac{3}{x}$; $\frac{4}{x-1}$; $\frac{8a}{x+3}$



Es darf nicht durch Null dividiert werden!

→ Beachtung bei der Definitionsmenge Beispiel: $\frac{1}{x-2} \rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$

Einen Bruchterm kann man **erweitern** / **kürzen**, indem man den Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl **erweitert** / **durch die gleiche Zahl kürzt**.

⇒ Änderung der Definitionsmenge!

Beispiel: $\frac{x(x-2)}{2x(x+3)}$ $\mathbb{D}_{vor} = \mathbb{Q} \setminus \{-3; 0\}$

$$\frac{x(x-2)}{2x(x+3)} = \frac{x-2}{2(x+3)} \quad \mathbb{D}_{nach} = \mathbb{Q} \setminus \{-3\}$$

Kürzen

$$f(x) = \frac{a}{x+b} + c, a \neq 0; b, c \in \mathbb{Q}$$

- der Graph G_f ist eine **Hyperbel**
- **Definitionslücke:** Der Nenner darf nicht Null werden $\rightarrow \mathbb{D}_f = \mathbb{Q} \setminus \{-b\}$
 $\rightarrow$ der Graph G_f hat an der Definitionslücke eine senkrechte Asymptote: $x = -b$

$$f(x) = \frac{a}{x+b} + c$$

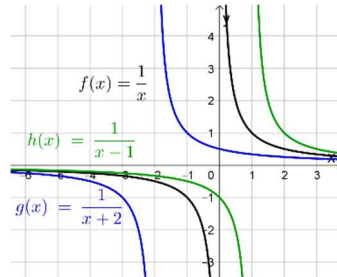
Verschiebung in x-Richtung

Verschiebung in y-Richtung

Verschiebung in x-Richtung

$b > 0$:
in negative x-Richtung

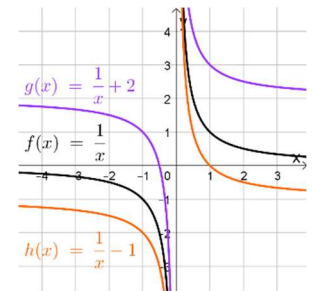
$b < 0$:
in positive x-Richtung



Verschiebung in y-Richtung

$c > 0$:
in positive y-Richtung

$c < 0$:
in negative y-Richtung



Addieren / Subtrahieren

Wichtig: **Hauptnenner verwenden!**

Die Zähler addieren / subtrahieren und den Nenner beibehalten

Beispiel:

$$\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x} = \frac{2x}{x(x-1)} + \frac{x-1}{x(x-1)} = \frac{3x-1}{x(x-1)}$$

Dividieren

Mit dem Kehrbruch multiplizieren; kürzen nicht vergessen!

Beispiel:

$$\frac{6}{x+1} : \frac{3}{2x+2} = \frac{6}{x+1} \cdot \frac{2x+2}{3} = \frac{2 \cdot 2(x+1)}{(x+1)} = 4$$

Multiplizieren

Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplizieren; kürzen nicht vergessen!

Beispiel:

$$\frac{2}{x+1} \cdot \frac{3x+3}{4} = \frac{2 \cdot (3x+3)}{4 \cdot (x+1)} = \frac{3(x+1)}{2(x+1)} = \frac{3}{2}$$

Kürzen

Zähler und Nenner faktorisieren

Nie aus Summen kürzen!

Beispiel:

$$\frac{2x+2}{x^2+x} = \frac{2(x+1)}{x(x+1)} = \frac{2}{x}$$

Vorgehensweise (Schritt für Schritt):

- 1) Definitionsmenge bestimmen
- 2) Bruchterme kürzen (falls möglich)
- 3) Hauptnenner bestimmen und dann
mit diesem beide Seiten der Bruchgleichung multiplizieren
- 4) bruchfreie Gleichung lösen
- 5) Überprüfung mit der Definitionsmenge
- 6) Lösungsmenge angeben



Beispiel: $\frac{2}{x} = \frac{-1}{x-3}$

zu 1) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0; 3\}$

zu 2) nicht möglich

zu 3) $HN: x(x-3) \rightarrow 2(x-3) = -x$

zu 4) $2x - 6 = -x \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2$

zu 5) $2 \in \mathbb{D}$

zu 6) $\mathbb{L} = \{2\}$

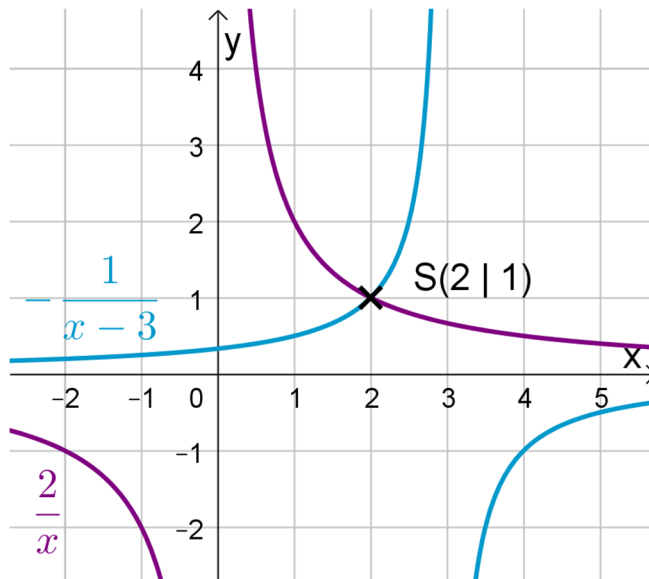
Klasse 8

Bruchgleichungen

- Graphische Lösung -

*Beide Seiten der
Gleichung als Funktion
zeichnen und die x-
Koordinaten der
Schnittstelle(n) ablesen!*

$$\frac{2}{x} = \frac{-1}{x-3}$$



$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-Faktoren}} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

n-Faktoren

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, a \neq 0$$

$$a^0 = 1 \quad \text{für } a \neq 0$$



Addieren / Subtrahieren

Gleichartige Terme werden durch Ausklammern der Koeffizienten addiert / subtrahiert

Beispiel:

$$7x^{-2} - x^{-2} = x^{-2}(7 - 1) = 6x^{-2}$$

Multiplizieren

Exponenten addieren

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Beispiel:

$$2^3 \cdot 2^{-6} = 2^{3+(-6)} = 2^{3-6} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Dividieren

Exponenten subtrahieren

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

Beispiel:

$$4^7 : 4^3 = 4^{7-3} = 4^4 = 256$$

Potenzieren einer Potenz

Exponenten multiplizieren

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Beispiel:

$$(2^3)^5 = 2^{3 \cdot 5} = 2^{15}$$

Potenzieren von Produkten und Quotienten

Exponenten verteilen

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Beispiel:

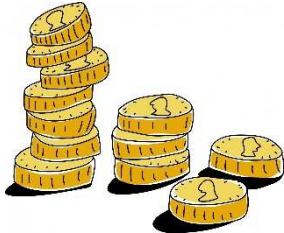
$$(3 \cdot 13)^2 = 3^2 \cdot 13^2$$

Exponenten verteilen

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

Beispiel:

$$(4 : 7)^3 = 4^3 : 7^3$$



Zufallsexperiment:

Experiment mit einem zufälligen (d.h. nicht vorhersehbarem) Ergebnis

Laplace-Experiment:

Alle **Ergebnisse** eines Zufallsexperiments sind **gleich wahrscheinlich**; z.B. Werfen einer Münze oder eines Würfels



Wichtige Begriffe:

- **Ergebnisraum Ω :** alle möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments
- **Ereignis:** Teilmenge A des Ergebnisraums Ω
- **Ereigniswahrscheinlichkeit / relative Häufigkeit:**

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ereignisse}}$$

z.B.: Würfeln $\rightarrow A$: „gerade Augenzahl“ $\rightarrow P(A) = P(2; 4; 6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

- **Elementarereignis:** Ereignis mit nur einem Ergebnis
- **Gegenereignis $\bar{A}$:** alle Ergebnisse, die nicht Teil des Ereignisses A sind.
- **Zählprinzip:** vgl. Grundwissen 5. Klasse

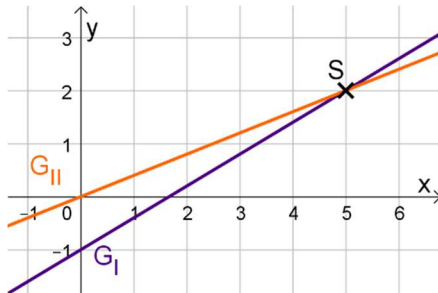
absolute
Häufigkeit

Lineares Gleichungssystem: zwei lineare Gleichungen mit zwei Variablen

Vorgehen: Beide Gleichungen nach derselben Variablen (am besten nach y) auflösen $\rightarrow$ es entstehen zwei Geraden

Beispiel:

$$\begin{array}{ll} \text{I.) } 3x - 5y = 5 & \rightarrow y = \frac{3}{5}x - 1 \\ \text{II.) } 2x = 5y & \rightarrow y = \frac{2}{5}x \end{array}$$



Schnittpunkt $S(5 | 2)$ und Lösungsmenge für das GLS angeben: $\mathbb{L} = \{(5 | 2)\}$

Sonderfälle:

- *parallele* Geraden haben keinen Schnittpunkt und somit **keine Lösung**
- sind die Geraden **identisch**, so haben sie **unendlich viele Lösungen**

Klasse 8

Lineare Gleichungssysteme (GLS)

- Rechnerische Lösung Teil 1 -



Beispiel

Einsetzungs- verfahren	1. Löse eine Gleichung nach einer Variablen auf 2. Setze diese Variable in die zweite Gleichung ein und löse diese 3. Setze die Lösung der zweiten Variablen in die erste Gleichung ein 4. Gib die Lösungsmenge an	$\begin{aligned} \text{I. } x + 2 &= -y && \rightarrow y = -x - 2 \\ \text{II. } 4 &= x + 2y \\ 4 &= x + 2(-x - 2) \\ 4 &= x - 2x - 4 \\ 8 &= -x && \rightarrow x = -8 \\ x \text{ in I.: } y &= 8 - 2 = 6 \\ &\rightarrow \mathbb{L} = \{(-8 6)\} \end{aligned}$
Gleichsetzungs- verfahren	1. Löse beide Gleichungen nach derselbe Variablen auf 2. Setze beide Terme gleich und löse diese Gleichung 3. Setze diese Lösung in eine der beiden Gleichungen ein 4. Gib die Lösungsmenge an	$\begin{aligned} \text{I. } y + 4 &= 2x && \rightarrow y = 2x - 4 \\ \text{II. } 3y &= -2x + 12 && \rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 4 \\ \text{I.} = \text{II.: } 2x - 4 &= -\frac{2}{3}x + 4 \\ \frac{8}{3}x &= 8 && \rightarrow x = 3 \\ \text{z.B. in I. } y &= 2 \\ &\rightarrow \mathbb{L} = \{(3 2)\} \end{aligned}$

Klasse 8

Lineare Gleichungssysteme (GLS)

- Rechnerische Lösung Teil 2 -



Beispiel

Additions- verfahren

Günstig, falls sich die Koeffizienten einer Variablen nur durch ein Vorzeichen oder einen Faktor unterscheiden

$$\text{I. } x + 2y = 7$$

$$\text{II. } 3x - y = 14$$

$$2 \cdot \text{II.} : 6x - 2y = 28$$

$$\text{I.} + \text{II.} : 7x = 35 \rightarrow x = 5$$

$$\text{In I.} : 5 + 2y = 7 \rightarrow y = 1$$

$$\rightarrow \mathbb{L} = \{(5 \mid 1)\}$$

Innerhalb einer Aufgabe dürfen mehrere Lösungsverfahren verwendet werden!

Der **Kreis** besteht aus dem **Mittelpunkt M** und dem **Radius r** mit $d = 2r$ (Durchmesser)

Kreisumfang $U = 2\pi \cdot r$

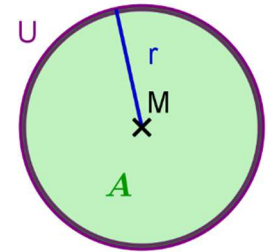
→ Umfang U und Radius r sind direkt proportional

Folge: verdoppelt man den Radius r, so verdoppelt sich der Umfang U

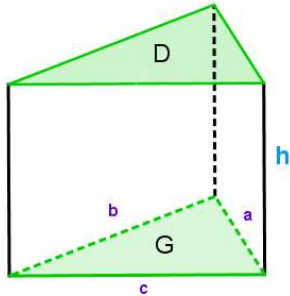
Kreisfläche $A = \pi \cdot r^2$

→ direkte Proportionalität zwischen Flächeninhalt A und dem Quadrat des Radius r

Folge: verdoppelt man den Radius r, so vervierfacht sich der Flächeninhalt A

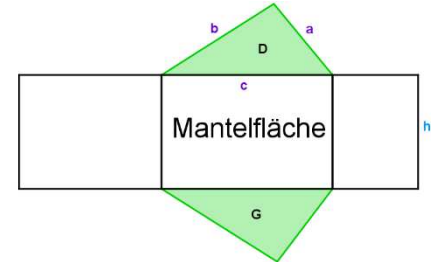


Die Kreiszahl π kann nur näherungsweise angegeben werden: $\pi \approx 3,14 \dots$



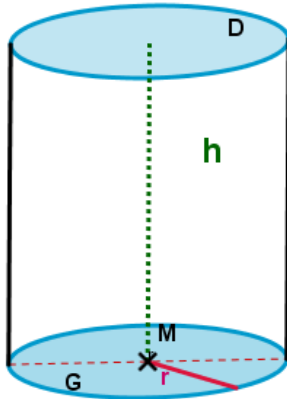
Eigenschaften:

- Grundfläche G und Deckfläche D bestehen aus zwei zueinander parallelen und kongruenten n-Ecken (hier: Dreiecke)
- Die Seitenflächen sind Rechtecke
- Höhe h ist der Abstand der Grund- und Deckflächen
- Die Seitenflächen bilden die Mantelfläche M (die Länge der Mantelfläche ist der Umfang U)

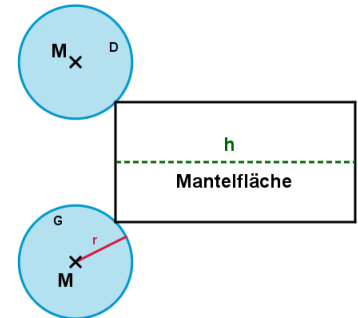


Oberflächeninhalt $O_{Prisma} = 2 \cdot G + M = 2 \cdot G + U \cdot h$

Volumen $V_{Prisma} = G \cdot h$

Eigenschaften:

- Grundfläche G und Deckfläche D bestehen aus zwei zueinander parallelen Kreisen mit gleichem Radius r
- Höhe h ist der Abstand der Grund- und Deckflächen
- die Mantelfläche M lässt sich als Rechteckfläche abrollen (die Länge entspricht dem Kreisumfang)



Oberflächeninhalt $O_{K.-Zylinder} = 2 \cdot G + M = 2 \cdot G + U \cdot h = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h = 2\pi r(r + h)$

Volumen $V_{Kreiszylinder} = G \cdot h = \pi r^2 h$